تقدير معالم توزيع وايبل معكوس جومبرتز المعمم باستخدام بعض طرق التقدير المختلفة دراسة تطبيقية

بحث مُستَل من رسالة ماجستير في الإحصاء التطبيقي والتأمين

إعداد

أ.مريم مصطفى محمد أحمد دنيا
معيدة بقسم الإحصاء التطبيقي والتأمين
كلية التجارة، جامعة دمياط
maryamdonia777@gmail.com

د. محمد إبراهيم محمد
أستاذ مساعد بقسم الإحصاء التطبيقي والتأمين
كلية التجارة، جامعة دمياط

د. مجدي علي إبراهيم
مدرس بقسم الإحصاء التطبيقي والتأمين
كلية التجارة، جامعة دمياط

المجلة العلمية للدراسات والبحوث المالية والتجارية

كلية التجارة – جامعة دمياط

المجلد الخامس ــ العدد الثاني ــ الجزء الرابع ــ يوليو ٢٠٢٤

التوثيق المقترح وفقاً لنظام APA:

دنيا، مريم مصطفى محمد أحمد؛ **محمد،** محمد إبراهيم؛ **إبراهيم،** مجدي علي (٢٠٢٤). تقدير معالم توزيع وايبل معكوس جومبرتز المعمم باستخدام بعض طرق التقدير المختلفة: دراسة تطبيقية، **المجلة العلمية للدراسات والبحوث المالية والتجارية**، كلية التجارة، جامعة دمياط، ٥(٢)٤، ٤٩١-٥٢٢

رابط المجلة: https://cfdj.journals.ekb.eg/

تقدير معالم توزيع وايبل معكوس جومبرتز المعمم باستخدام بعض طرق التقدير المختلفة: دراسة تطبيقية

أ.مريم مصطفى محمد دنيا؛ د. محمد إبراهيم محمد؛ د. مجدي علي إبراهيم

ملخص:

تهدف الدراسة إلى الحصول على تعميم جديد لتوزيع Inverse Gompertz (IG) ليكون له القدرة فى توفيق العديد من الظواهر الحياتية بدقة أعلى مقارنة بتعميمات الأخرى.

في هذه الدراسة تم تقديم تعميم جديد لتوزيع معكوس جومبرتز(IG) من خلال استخدام عائلة وايبل المعممة Weibull Generared Family (W-G) ويسمى توزيع وايبل معكوس جومبرتز(WIG) كما تم الحصول على بعض الخصائص الإحصائية للتعميم الجديد (WIG) مثل دالة الكوانتيل والعزوم والإحصاءات الترتيبية. وأيضاً تم إثبات أن دالة الكثافة الإحتمالية يمكن التعبير عنها بدالة خطية من دوال الكثافة لتوزيع معكوس جومبرتز. كما تم تقدير معالم التوزيع من خلال استخدام أربعة طرق تقدير مختلفة وهي طريقة الإمكان الأعظم وطريقة المربعات الصغرى وطريقة المربعات الصغرى المرجحة وطريقة كرامر- فون ميزس وتم تقديم دراسة محاكاة لتقييم أداء المقدرات.

وعلاوة علي ذلك، تم تطبيق التعميم الجديد على مجموعتين مختلفتين من البيانات، فالمجموعة الأولى هي مجموعة بيانات للعلوم السلوكية ذات الحجم 134 لدرجات التصنيف العام للأعراض العاطفية لمرحلة ما قبل المدرسة والمجموعة الثانية تتضمن بيانات خاصة بأوقات البقاء Lifetimeلوثائق التأمينات الخاصة بحالات الوفاة المبكرة للأشخاص المؤمن عليهم لدي شركة مصر لتأمينات الحياة في الفترة من 1/1/2009 إلي 1/1/2019، وأثبتت الدراسة مرونة وكفاءة التعميم الجديد مقارنة بخمسة توزيعات أخرى وذلك طبقاً لبعض مقاييس جودة التوفيق الإحصائية.

الكلمات المفتاحية:

توزيع معكوس جومبرتز- عائلة وايبل المعممة – العزوم- دالة الكوانتيل – الإحصاءات الترتيبية- طريقة الإمكان الأعظم- طريقة المربعات الصغرى العادية- طريقة المربعات الصغرى المرجحة- طريقة كرامر- فون ميزس- بيانات البقاء.

(١)مقدمة:

تعتبر التوزيعات الإحصائية من أهم الموضوعات في مجال البحث العلمي حيث ساهمت في دراسة العديد من الظواهر المختلفة في المجتمع ويعد توزيع Inverse Gompertz من أهم التوزيعات العكسية لقدرته علي ملائمة الكثير من البيانات في مجالات الهندسة والعلوم السلوكية والبيولوجية والديمغرافية والاقتصاد وغيرها من المجالات.وقد قدم El-Gohary et al. (2013) بتعميم جديد للتوزيعات الأسية وتوزيع Gompertz يطلق علي هذا التوزيع توزيع Gompertz المعمم واستخدم Dey et al. (2018) توزيع Gompertz على بيانات البقاء وقام Eliwa et al. (2019) بتطبيق توزيع Inverse Gompertz على بيانات العلوم السلوكية وحصل Abdelhady and Amer (2020) علي توزيع جديد بثلاث معلمات يسمي Inverse Power

Gompertz distribution وعرض El- Morshedy et al. (2020) نموذجاً جديداً معمماً بثلاث معلمات لتوزيع Inverse Gompertz ويسمي Kumaraswamy Inverse Gompertz Distribution قدم Elshahhat et al. (2021) توزيع جديد ثلاثي المعلمات يطلق عليه التوزيع الممتد لمعكوس جومبرتز قدم Taniş and Karakaya (2021) دراسة بعنوان A Comparison Of Estimation Methods For One Parameter Inverse Gompertz Distribution بهدف مقارنة طرق التقدير لتوزيع A بمعلمة واحدة وهو حالة خاصة لتوزيع معكوس جومبرتز اقترح Adegoke et al. (2023a) توزيع احتمالي جديد يعتبر امتداد لتوزيع جومبرتز لنمذجة بيانات البقاء ويسمي Topp-Leone Inverse Gompertz Distribution (TLIG) بالإضافة إلي ذلك قدم Adegoke et al. (2023b) دراسة توزيع معكوس جومبرتز المحول في نمذجة بيانات البقاء.

يأخذ هذا البحث بالنهج الذي قدمه (Bourguignon et al. (2014 لتوليد توزيعات جديدة باستخدام عائلة .Weibull Generared Family (W-G) حيث تكون دالة التوزيع التراكمي ودالة الكثافة الإحتمالية (على الترتيب) الشكل التالي:

$$F(x;\lambda,b) = 1 - e^{-\lambda\left(\frac{G(x)}{1-G(X)}\right)^{b}} \qquad x > 0,\ \lambda,\ b > 0 \quad (1)$$

$$f(x;\lambda,b) = \lambda\, b \left(\frac{G(x)}{1-G(x)}\right)^{b-1} \left(\frac{g(x)}{(1-G(x))^{2}}\right) e^{-\lambda\left(\frac{G(x)}{1-G(X)}\right)^{b}} \qquad (2)$$

حيث تمثل G(x) دالة التوزيع التراكمية وتمثل $g(x) = \frac{d}{dx} G(X)$

وتكون دالة الخطرhazard rate للعائلة علي الشكل التالي:

$$h(x) = \frac{\lambda\, b\, g(x) G(x)^{b-1}}{(1-G(x))^{b+1}} \qquad (3)$$

ويهدف هذا البحث إلى اشتقاق توزيع جديد يسمى " نوزيع وايبل معكوس جومبرتز " (WIG) ويعتبر أحد التعميمات الجديده الخاصة بتوزيع Inverse Gompertz وذلك من خلال عائلة وايبل المعممة .

(١) توزيع وايبل معكوس جومبرتز

تأخذ دالة التوزيع التراكمية Cdf ودالة الكثافة الإحتمالية pdf الخاصة بتوزيع (IG) بمعلمة شكل "shape" α ومعلمة قياس "Scale" β الشكل التالي (على الترتيب):

$$F(x;\alpha,\beta) = e^{\frac{-\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)} \qquad x > 0,\ \alpha,\ \beta > 0 \ (4)$$

$$f(x;\alpha,\beta)= \frac{\alpha}{x^2} e^{\frac{-\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)+\frac{\beta}{x}} \qquad x > 0,\ \alpha,\ \beta > 0 \quad (5)$$

فمن خلال التعويض بالمعادلات (4) و(5) في المعادلات (1) و (2) سوف نحصل على دالة التوزيع التراكمي Cdf ودالة الكثافة الإحتمالية pdf

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda\left(\frac{e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}}{1-e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}}\right)^{b}} \qquad (6)$$

$\lambda,\ b\ ,\alpha$ and $\beta > 0,\ x > 0$

$$f(x) = \lambda\, b\, \frac{\alpha}{x^2} e^{\frac{-\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)+\frac{\beta}{x}} \left[\frac{\left(e^{\frac{-\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}\right)^{b-1}}{\left(1-e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}\right)^{b+1}}\right] e^{-\lambda\left(\frac{e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}}{1-e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}}\right)^{b}} \qquad (7)$$

$\lambda,\ b\ ,\alpha$ and $\beta > 0,\ x > 0$

وتأخذ دالة البقاء Survival function S(x) لتوزيع (WIG) حيث $S(x) = 1 - F(x)$

علي الشكل التالي:

$$S(x) = e^{-\lambda\left(\frac{e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}}{1-e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}}\right)^{b}}$$

وتكون دالة الخطر hazard rate function h(x) ودالة Cumulative function H(x) لتوزيع (WIG) على الترتيب التالي: hazard rate

حيث $h(x)= f(x)/ S(x)$ و $H(x)= -ln\ S(x)$

$$h(x)= \lambda\, b \frac{\alpha}{x^2} e^{\frac{\beta}{x}} \left[\frac{\left(e^{\frac{-\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)} \right)^{b}}{\left(1-e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)} \right)^{b+1}} \right]$$

$$H(x)= -\ln \left[e^{-\lambda \left(\frac{e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}}{1-e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}} \right)^{b}} \right]$$

وتأخذ دالة الخطر العكسية Reversed hazard rate function r(x) لتوزيع (WIG)

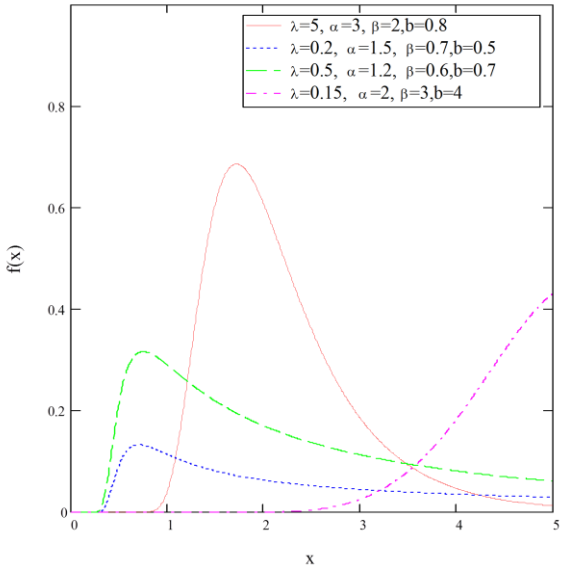
الشكل التالي حيث أن $r(x) = f(x) / F(x)$

$$r(x) = \frac{\left[\lambda\, b \frac{\alpha}{x^2} e^{\frac{\beta}{x}} \left[\frac{\left(e^{\frac{-\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)} \right)^{b}}{\left(1-e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)} \right)^{b+1}} \right] e^{-\lambda \left(\frac{e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}}{1-e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}} \right)^{b}} \right]}{\left[1-e^{-\lambda \left(\frac{e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}}{1-e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}} \right)^{b}} \right]}$$

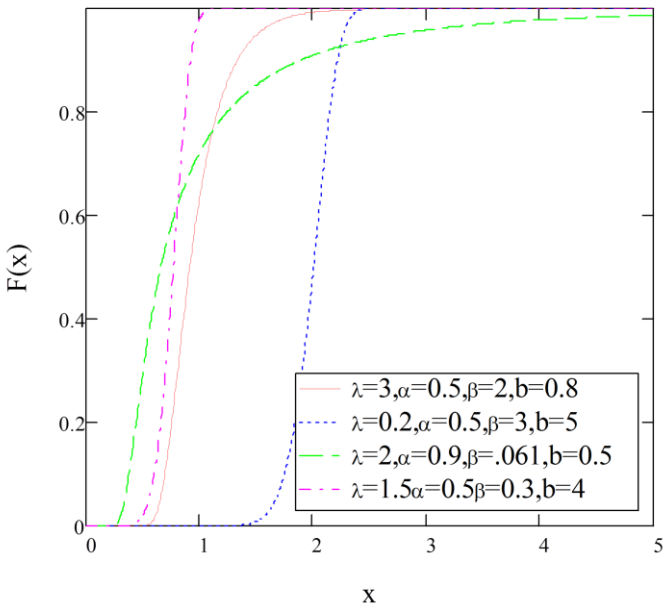
كما تأخذ دالة Odds function O(x) (WIG) لتوزيع الشكل التالي حيث أن

$$O(x) = e^{-\lambda \left(\frac{e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}}{1-e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}} \right)^{-b}} - 1$$

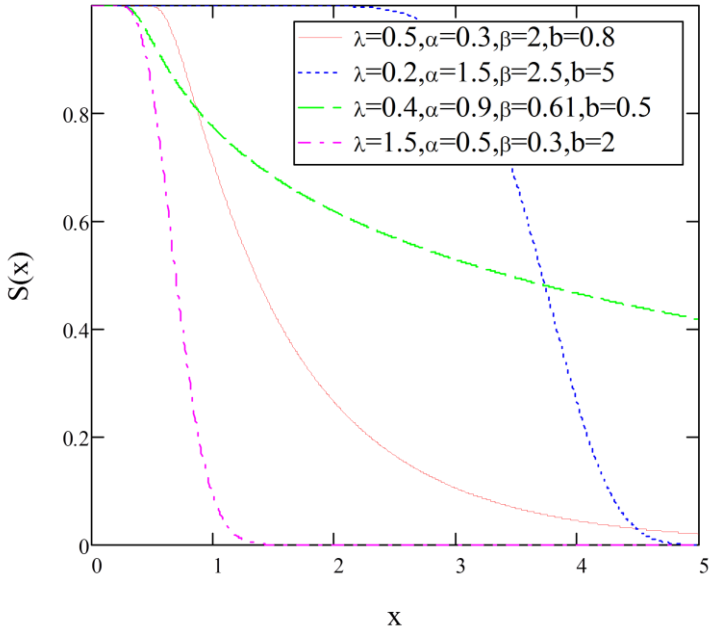
يعرض الشكل (1) بعض الأشكال الممكنة لدالة كثافة الاحتمال pdf عند قيم مختلفة للمعالم والشكل (٢) يوضح دالة التوزيع التراكمية Cdf لتوزيع (WIG) كما يعرض الشكل (٣) دالة البقاء Survival function S(x)



شكل (١): دالة pdf لتوزيع (WIG) عند قيم مختلفة للمعلمات

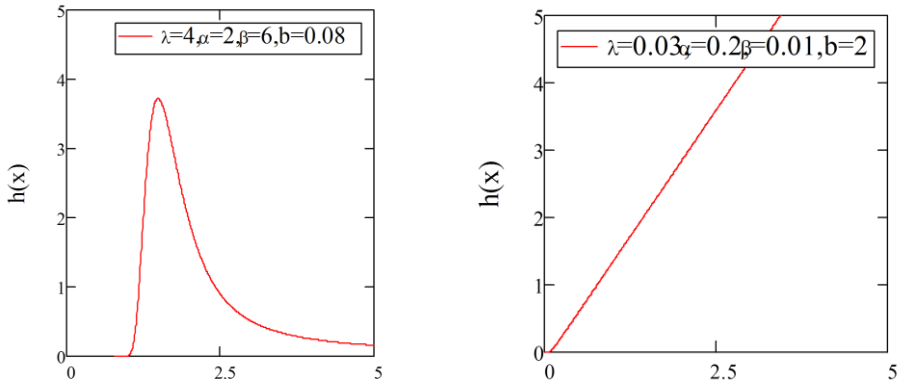


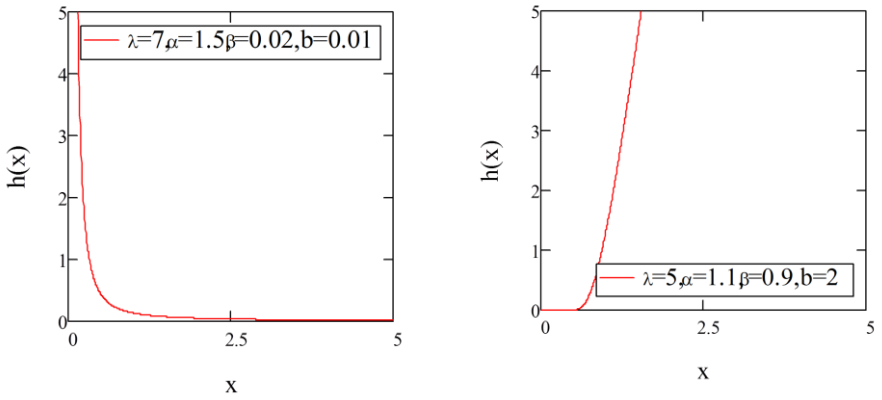
شكل (٢): دالة Cdf لتوزيع (WIG) عند قيم مختلفة للمعلمات



شكل (٣): دالة Survival function لتوزيع (WIG) عند قيم مختلفة للمعلمات

يعرض الشكل (٤) بعض الأشكال الممكنة لدالة hazard function h(x) لتوزيع (WIG) عند بعض قيم مختلفة للمعالم ويأخذ أشكال مختلفة ليكون نموذجاً مناسباً لملاءمة بيانات البقاء على قيد الحياة في التطبيقات العملية.





شكل (٤): بعض الأشكال الممكنة لدالة hazard function لتوزيع (WIG)

هذه أشكال لتوليفات من أربعة معالم فيظهر معدل الخطر بأنه يأخذ أشكال مختلفة من bathtub وهذا يجعل من دالة معدل الخطر مفيدة ومناسبة في حالة سلوك دالة الخطر التجريبية الغير منتظمة non monotone empirical behaviors والتي من المرجح أن تتم مواجهتها أو مشاهدتها في مواقف الحياة الواقعية.

(٢) التمثيل الخطي لدالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع (WIG)

سيتم عرض صورة أخري لدالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع (WIG) كتركيبة خطية من دوال الكثافات الاحتمالية لتوزيع (IG)

باستخدام التوسيع الأسي لدالة

$$e^{-\lambda\left(\frac{e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}-1}\right)}}{1-e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}-1}\right)}}\right)^{b}} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\frac{\lambda^{k}}{k!}\frac{\left[e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}-1}\right)}\right]^{bk+b-1}}{\left[1-e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}-1}\right)}\right]^{bk+b+1}} \qquad (8)$$

باستخدام التوسيع (8) يمكن كتابة المعادلة (7) علي الصورة التالية:

$f(x; \lambda,b,\alpha,\beta)=$

$$= \lambda\, b\, \frac{\alpha}{x^2} e^{\frac{-\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)+\frac{\beta}{x}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\lambda^k}{k!} \frac{\left[e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}\right]^{bk+b-1}}{\left[1-e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}\right]^{bk+b+1}} \qquad (9)$$

يمكن كتابة دالة الكثافة الإحتمالية كالتالي

$f(x; \lambda,b,\alpha,\beta)=$

$$\lambda\, b \frac{\alpha}{x^2} e^{\frac{-\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)+\frac{\beta}{x}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\lambda^k}{k!} \left[e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}\right]^{bk+b-1} \left[1 - e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}\right]^{-bk-b-1}$$

وبتطبيق نظرية ذي الحدين المعممة يمكننا كتابة الصورة التالية:

$$\left(1 - e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}\right)^{-bk-b-1} =$$

$$\sum_{k,j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(bk+b+j+1)}{j!\,\Gamma[bk+b+1]} \left(e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}\right)^{bk+b+j-1} \qquad (10)$$

إذاً يمكن كتابة دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع (WIG)

$f(x; \lambda,b,\alpha,\beta) =$

$$\lambda\, b\, \frac{\alpha}{x^2} e^{\frac{-\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)+\frac{\beta}{x}} \sum_{k,j=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\lambda^k}{k!j!} \frac{\Gamma(bk+b+j+1)}{\Gamma[bk+b+1]} \left(e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}\right)^{bk+b+j-1}$$

ويمكن التعبير عن دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع (WIG) على الشكل التالي:

$f(x;\lambda,b,\alpha,\beta)=$

$$b\sum_{k,j=0}^{\infty}(-1)^k \frac{\lambda^{1+k}}{k!j}\frac{\Gamma(bk+b+j+1)}{j!\,\Gamma[bk+b+1]} \frac{\alpha}{x^2} e^{\frac{-\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)+\frac{\beta}{x}} \left[e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}\right]^{bk+b+j-1}$$

وأخيراً

$$f(x;\lambda,\alpha,\beta)=\sum_{k,j=0}^{\infty} c_{k,j}\ w_{bk+b+j}(x) \qquad (11)$$

حيث

$$c_{k,j} = b\,(-1)^k \frac{\lambda^{1+k}}{k!\,j!}\ \frac{\Gamma(bk+b+j+1)}{\Gamma[bk+b+1][bk+b+j]}$$

$$w_{bk+b+j}(x) = [bk+b+j]g(x,\alpha,\beta)\,[G(x,\alpha,\beta)]^{bk+b+j-1}$$

$$G(x) = G(x,\alpha,\beta) = e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}$$

$$g(x) = g(x,\alpha,\beta) = \frac{\alpha}{x^2} e^{\frac{-\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)+\frac{\beta}{x}}$$

وحيث$W_{bk+b+j}(x)$ تعبر عن دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع معكوس جومبرتز وبالتالي يمكن الحصول على الخصائص الهيكلية لتوزيع (WIG) بسهولة من خلال خصائص توزيع (IG) عن طريق استبدال$G(x)$ و$g(x)$ وهما Cdf و pdf لنموذج الأساسي.

وبتكامل المعادلة (11) على المدى من صفر إلى x نحصل على دالة التوزيع التجمعية لتوزيع (WIG) كتركيبة خطية من دوال التوزيع التجمعية لتوزيع (IG) وتأخذ الصورة التالية:

$$F(x;\lambda,\alpha,\beta)=\sum_{k,j=0}^{\infty} c_{k,j}\ W_{bk+b+j}(x)$$

(٣) بعض الخصائص الإحصائية لتوزيع (WIG)

Quantile function (١-٣)

يمكننا الحصول على دالة الكوانتيل لمتغير عشوائي X الذي يتع توزيع (WIG) من خلال إيجاد معكوس الدالة (7) وتكون الدالة على الشكل التالي:

$$x_{u=}\frac{\beta}{ln\left[\frac{\beta}{\alpha}\ln\left(1+\left(-\frac{\ln(1-u)}{\lambda}\right)^{\frac{-1}{b}}\right)+1\right]}$$

(٣-٢) العزوم

يمكن اشتقاق العزوم لتوزيع (WIG) من خلال عزوم توزيع (IG) باستخدام المعادلة 11بفرض أن x متغير عشوائي يتبع توزيع (IG) بمعلمات α و β إذاً يأخذ العزم من الدرجة r (r^{th}) للمتغير العشوائي x الشكل التالي:

$$\acute{\mu}_r = \mathrm{E}(x^r) = \sum_{k,j=0}^{\infty} c_{k,j} \int_0^{\infty} x^r \; W_{bk+b+j}(x)\, dx$$

$$\acute{\mu}_r = \sum_{k,j=0}^{\infty} \sum_{i,m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{i} \frac{(-1)^{i+1}\alpha^{i+1}(1+i)^m \beta^{r-i-1} j^{r-m-1}}{j!\; m!\; (i-j)!} \mathrm{r}m - r + 1 \;\; c_{k,j}$$

(٣-٣) الإحصاءات الترتيبية لتوزيع (WIG)

تأخذ دالة الكثافة الإحتمالية لإحصاء الترتيبي من الرتبة (r) حيث $1 \le r \le n$ للمتغيرات العشوائية المستقلة والمتماثلة فى التوزيع $X_1, X_2, \dots, X_n$ والتي تتبع توزيع (WIG) الصورة التالية:

$$g_{i:n}(x) = c_{(r)} \lambda\, b \frac{\alpha}{x^2} e^{\frac{\beta}{x}} \left[\frac{(z)^b}{(1-z)^{b+1}}\right] \; \mathrm{e}^{-\lambda\left(\frac{z}{1-z}\right)^{\mathrm{b}}} \sum_{r=0}^{n-i} (-1)^r \binom{n-i}{r} \left[1 - \mathrm{e}^{-\lambda\left(\frac{z}{1-z}\right)^{\mathrm{b}}}\right]^{i+r-1}$$

حيث

$$c_{(r)} = \frac{n!}{(i-1)(n-i)} \quad , \quad z = e^{\frac{-\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}$$

(٤) تقدير معلمات توزيع (WIG)

(٤-١) تقدير معالم توزيع (WIG) باستخدام طريقة الإمكان الأعظم (MLE)

بفرض أن $X_1, X_2, \dots, X_n$ متغيرات عشوائية ومتماثلة في التوزيع Independentiy and Identically Distributed (I.I.D) وتتبع توزيع (WIG) بمعالم مجهولة(φ = (λ,α,β,b فإن

دالة الإمكان اللوغاريتمية Log – Likelihood function لدالة الكثافة الاحتمالية (7) تكون على الشكل التالي :

$$L(\varphi) = n\ln(\lambda)+n\ln(b) + nln(\alpha) - 2\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i) + \beta\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i} - \frac{b\alpha}{\beta}\sum_{i=1}^{n}\left(e^{\frac{\beta}{x_i}} - 1\right) - (b+1)\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1 - e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x_i}-1}\right)}\right) - \lambda\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x_i}-1}\right)}}{1-e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x_i}-1}\right)}}\right)^{b} \quad (12)$$

يمكن الحصول على مقدرات الإمكان الأعظم من خلال ايجاد التفاضل الجزئي الأول لدالة $L(\varphi)$ بالنسبة لكل معلمة من المعالم ومساواة النواتج بالصفر.

ويأخذ التفاضل الجزئي للمعادلة (12) الصورة التالية:

$$\frac{\partial l}{\partial\lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x_i}-1}\right)}}{1-e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x_i}-1}\right)}}\right)^{b}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\alpha} = \frac{n}{\alpha} - \frac{b}{\beta}\sum_{i=1}^{n}\left(e^{\frac{\beta}{x_i}} - 1\right) + \frac{b+1}{\beta}\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(e^{\frac{\beta}{x_i}} - 1\right)e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x_i}-1}\right)}}{\left(1-e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x_i}-1}\right)}\right)} + \frac{b\lambda}{\beta}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(e^{\frac{\beta}{x_i}} - 1\right)\left(1-e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x_i}-1}\right)}\right)^{-b-1}e^{-\frac{\alpha(b+1)}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x_i}-1}\right)}\right] + \frac{b\lambda}{\beta}\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(e^{\frac{\beta}{x_i}} - 1\right)e^{\frac{-\alpha b\left(e^{\frac{\beta}{x_i}-1}\right)}{\beta}}}{\left(1-e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x_i}-1}\right)}\right)^{b}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial b}=\frac{n}{b}-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x_i}}-1\right)$$

$$-\sum_{i=1}^{n} ln\left(1-e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x_i}}-1\right)}\right)+\frac{\alpha\lambda}{\beta}\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(e^{\frac{\beta}{x_i}}-1\right)e^{\frac{-\alpha b\left(e^{\frac{\beta}{x_i}}-1\right)}{\beta}}}{\left(1-e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x_i}}-1\right)}\right)^{b}}$$

$$+\lambda\sum_{i=1}^{n}\frac{ln\left(1-e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x_i}}-1\right)}\right)e^{\frac{-\alpha b\left(e^{\frac{\beta}{x_i}}-1\right)}{\beta}}}{\left(1-e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x_i}}-1\right)}\right)^{b}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \beta}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}-\frac{b\alpha}{\beta}\sum_{i=1}^{n}\frac{e^{\frac{\beta}{x_i}}}{x_i}$$

$$+\frac{b\alpha}{\beta^2}\sum_{i=1}^{n}\left(e^{\frac{\beta}{x_i}}-1\right)-(b$$

$$+1)\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(\frac{\alpha}{\beta^2}\left(e^{\frac{\beta}{x_i}}-1\right)-\frac{\alpha}{\beta x_i}e^{\frac{\beta}{x_i}}\right)e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x_i}}-1\right)}}{\left(1-e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x_i}}-1\right)}\right)}$$

$$-\lambda\sum_{i=2}^{n}\frac{\left[\frac{\alpha b}{\beta^2}\left(e^{\frac{\beta}{x_i}}-1\right)-\frac{\alpha b}{\beta x_i}e^{\frac{\beta}{x_i}}\right]e^{\frac{-\alpha b}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x_i}}-1\right)}}{\left(1-e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x_i}}-1\right)}\right)^{b}}$$

$$-b\lambda\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\alpha}{\beta^2}\left(e^{\frac{\beta}{x_i}}-1\right)\right.$$

$$\left.-\frac{\alpha}{\beta x_i}e^{\frac{\beta}{x_i}}\right)e^{-\frac{\alpha(b+1)}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x_i}}-1\right)}\left(1-e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x_i}}-1\right)}\right)^{-b-1}$$

ويمكن الحصول على تقديرات الإمكان الأعظم للمعالم المجهولة من خلال حل المعادلات غير الخطية التالية:

$$(\frac{\partial L}{\partial \lambda}=0\ ,\ \frac{\partial L}{\partial \alpha}=0\ ,\ \frac{\partial L}{\partial b}=0\ ,\frac{\partial L}{\partial \beta}=0)$$

(٤-٢) تقدير معالم توزيع (WIG) باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية (OLS)

بفرض أن F(x) دالة التوزيع للمتغيرات العشوائية التي تتبع توزيع (WIG) $X_1, X_2, \dots, X_n$ وتشير X1:n> X2:n>… > Xn:n إلى المتغيرات العشوائية الترتيبية المقابلة لها، فإنه يتم الحصول علي تقدير المربعات الصغرى (OLS) من خلال تدنية المعادلة التالية:

$$S(\lambda,b,\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n}\left[F(x_{i:n}|\ \lambda,b,\alpha,\beta)-\frac{i}{n+1}\right]^2$$

وبالتالي يمكن الحصول على المقدرات ($\hat{\lambda}_{OLSE}$، $\hat{b}_{OLSE}$ ، $\hat{\alpha}_{OLSE}$، $\hat{\beta}_{OLSE}$) للمعالم (β,α,b,λ) من خلال حل المعادلات الغير خطية التالية:

$$\frac{\partial S(\lambda,b,\alpha,\beta)}{\partial \lambda}=\sum_{i=1}^{n}\left[F(x_{i:n}|\ \lambda,b,\alpha,\beta)-\frac{i}{n+1}\right]^2\Delta_1(x_{i:n}|\ \lambda,b,\alpha,\beta)=0$$

$$\frac{\partial S(\lambda,b,\alpha,\beta)}{\partial b}=\sum_{i=1}^{n}\left[F(x_{i:n}|\ \lambda,b,\alpha,\beta)-\frac{i}{n+1}\right]^2\Delta_2(x_{i:n}|\ \lambda,b,\alpha,\beta)=0$$

$$\frac{\partial S(\lambda,b,\alpha,\beta)}{\partial \alpha}=\sum_{i=1}^{n}\left[F(x_{i:n}|\ \lambda,b,\alpha,\beta)-\frac{i}{n+1}\right]^2\Delta_3(x_{i:n}|\ \lambda,b,\alpha,\beta)=0$$

$$\frac{\partial S(\lambda,b,\alpha,\beta)}{\partial \beta}=\sum_{i=1}^{n}\left[F(x_{i:n}|\ \lambda,b,\alpha,\beta)-\frac{i}{n+1}\right]^2\Delta_4(x_{i:n}|\ \lambda,b,\alpha,\beta)=0$$

$$\Delta_1(x_{i:n}|\ \lambda,b,\alpha,\beta)$$

$$=\left(\frac{e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}}{1-e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}}\right)^{b}e^{-\lambda\left(\frac{e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}}{1-e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}}\right)^{b}} \qquad (13)$$

$$\Delta_2(x_{i:n}|\,\lambda, b, \alpha, \beta) = \left[-\frac{\alpha\lambda}{\beta} \frac{\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right) e^{\frac{-\alpha b\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}{\beta}}}{\left(1-e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}\right)^{b}} - \lambda \frac{ln\left(1-e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}\right) e^{\frac{-\alpha b\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}{\beta}}}{\left(1-e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}\right)^{b}} \right] e^{-\lambda\left(\frac{e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}}{1-e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}}\right)^{b}} \quad (14)$$

$$\Delta_3(x_{i:n}|\,\lambda, b, \alpha, \beta) = \left(-\frac{b\lambda}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)\left(1-e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}\right)^{-b-1} e^{-\frac{\alpha(b+1)}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)} - \frac{b\lambda}{\beta}\frac{\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right) e^{\frac{-\alpha b\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}{\beta}}}{\left(1-e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}\right)^{b}} \right) e^{-\lambda\left(\frac{e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}}{1-e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}}\right)^{b}} \quad (15)$$

$$\Delta_4(x_{i:n}|\,\lambda,b,\alpha,\beta) = \left[\lambda\frac{\left[\frac{\alpha b}{\beta^2}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)-\frac{\alpha b}{\beta x}e^{\frac{\beta}{x_i}}\right]e^{\frac{-\alpha b}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}}{\left(1-e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}\right)^{b}} + b\lambda\left(\frac{\alpha}{\beta^2}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)-\frac{\alpha}{\beta x}e^{\frac{\beta}{x_i}}\right)e^{-\frac{\alpha(b+1)}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}\left(1-e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}\right)^{-b-1}\right] \times e^{-\lambda\left(\frac{e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}}{1-e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}}\right)^{b}} \quad (16)$$

(٤-٣) تقدير معالم توزيع (WIG) باستخدام طريقة المربعات الصغرى المرجحة (WLS)

بفرض أن F(x) دالة التوزيع للمتغيرات العشوائية التي تتبع توزيع (WIG) $X_1, X_2, \dots, X_n$ وتشير X1:n> X2:n>… > Xn:n إلى المتغيرات العشوائية الترتيبية المقابلة لها، فإنه يتم الحصول علي تقدير المربعات الصغرى (WLS) من خلال تدنية المعادلة التالية:

$$W(\lambda,b,\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n}\frac{(n+1)^2(n+2)}{i(n-i-1)}\left[F(x_{i:n}|\,\lambda,b,\alpha,\beta)-\frac{i}{n+1}\right]^2$$

وبالتالي يمكن الحصول على المقدرات ($\hat{\lambda}_{OLSE}$، $\hat{b}_{OLSE}$ ، $\hat{\alpha}_{OLSE}$، $\hat{\beta}_{OLSE}$) للمعالم (β,α,b,λ) من خلال حل المعادلات الغير خطية التالية:

$$\frac{\partial W(\lambda,b,\alpha,\beta)}{\partial\lambda}=\sum_{i=1}^{n}\left[F(x_{i:n}|\,\lambda,b,\alpha,\beta)-\frac{i}{n+1}\right]^2\Delta_1(x_{i:n}|\,\lambda,b,\alpha,\beta)=0$$

$$\frac{\partial W(\lambda,b,\alpha,\beta)}{\partial b}=\sum_{i=1}^{n}\left[F(x_{i:n}|\,\lambda,b,\alpha,\beta)-\frac{i}{n+1}\right]^2\Delta_2(x_{i:n}|\,\lambda,b,\alpha,\beta)=0$$

$$\frac{\partial W(\lambda,b,\alpha,\beta)}{\partial\alpha}=\sum_{i=1}^{n}\left[F(x_{i:n}|\,\lambda,b,\alpha,\beta)-\frac{i}{n+1}\right]^2\Delta_3(x_{i:n}|\,\lambda,b,\alpha,\beta)=0$$

$$\frac{\partial W(\lambda,b,\alpha,\beta)}{\partial\beta}=\sum_{i=1}^{n}\left[F(x_{i:n}|\,\lambda,b,\alpha,\beta)-\frac{i}{n+1}\right]^2\Delta_4(x_{i:n}|\,\lambda,b,\alpha,\beta)=0$$

حيث $\Delta_1(x_{i:n}|\lambda,b,\alpha,\beta)$ و $\Delta_2(x_{i:n}|\lambda,b,\alpha,\beta)$ و $\Delta_3(x_{i:n}|\lambda,b,\alpha,\beta)$ و $\Delta_4(x_{i:n}|\lambda,b,\alpha,\beta)$ تم اشتقاقهم في المعادلات (13) و (14) و (15) و (16) ويمكن حلها عن طريق بعض البرامج الإحصائية التي تستخدم في حل هذه المعادلات عددياً مثل الحزمة الرياضية MathCAd(15)

(٤-٤) تقدير معالم توزيع (WIG) باستخدام طريقة كرامر- فون ميزس (CVM)

يمكن الحصول على المقدرات ($\hat{\lambda}_{OLSE}$، $\hat{b}_{OLSE}$ ، $\hat{\alpha}_{OLSE}$، $\hat{\beta}_{OLSE}$) للمعالم (β,α,b,λ) من خلال تدنية الدالة التالية:

$$W(\lambda,b,\alpha,\beta)=\frac{1}{12n}+\sum_{i=1}^{n}\left[F(x_{i:n}|\lambda,b,\alpha,\beta)-\frac{2i-1}{2n}\right]^2$$

وبحل المعادلات غير الخطية التالية يتم الحصول على مقدرات كرامر- فون ميزس (CVM)

$$\frac{\partial C(\lambda,b,\alpha,\beta)}{\partial\lambda}=\sum_{i=1}^{n}\left[F(x_{i:n}|\lambda,b,\alpha,\beta)-\frac{2i-1}{2n}\right]^2\Delta_1(x_{i:n}|\lambda,b,\alpha,\beta)=0$$

$$\frac{\partial C(\lambda,b,\alpha,\beta)}{\partial b}=\sum_{i=1}^{n}\left[F(x_{i:n}|\lambda,b,\alpha,\beta)-\frac{2i-1}{2n}\right]^2\Delta_2(x_{i:n}|\lambda,b,\alpha,\beta)=0$$

$$\frac{\partial C(\lambda,b,\alpha,\beta)}{\partial\alpha}=\sum_{i=1}^{n}\left[F(x_{i:n}|\lambda,b,\alpha,\beta)-\frac{2i-1}{2n}\right]^2\Delta_3(x_{i:n}|\lambda,b,\alpha,\beta)=0$$

$$\frac{\partial C(\lambda,b,\alpha,\beta)}{\partial\beta}=\sum_{i=1}^{n}\left[F(x_{i:n}|\lambda,b,\alpha,\beta)-\frac{2i-1}{2n}\right]^2\Delta_4(x_{i:n}|\lambda,b,\alpha,\beta)=0$$

حيث $\Delta_1(x_{i:n}|\lambda,b,\alpha,\beta)$ و $\Delta_2(x_{i:n}|\lambda,b,\alpha,\beta)$ و $\Delta_3(x_{i:n}|\lambda,b,\alpha,\beta)$ و $\Delta_4(x_{i:n}|\lambda,b,\alpha,\beta)$ تم اشتقاقهم في المعادلات (13) و (14) و (15) و (16) ويمكن حلها عن طريق بعض البرامج الإحصائية التي تستخدم في حل هذه المعادلات عددياً مثل الحزمة الرياضية MathCAd(15) .

(5) دراسة محاكاة توزيع (WIG)

تساعد المحاكاة في دراسة فاعلية النموذج الذي يمثل ظاهرة ما، فهي تقنية رياضية تنشأ بالنتائج المحتملة التي تستخدم للوصول إلي كل ما يتعلق بسلوك الظاهرة قيد الدراسة وتم استخدام أسلوب محاكاة مونت كارلو للعينات العشوائية وأول استخدام لأسلوب محاكاة مونت كارلو كان من قبل عالم الفيزياء الحائز علي جائزة نوبل سنة 1930 إنريكو فيرمي (Enrico Fermi) حينما استخدم طريقة عشوئية لحساب خصائص النيوترون (Mittal et al 2017).

وقد تم إجراء دراسة محاكاة مونت كارلو (Monte Carlo simulation) لتقدير معلمات توزيع (WIG) باستخدام أربعة طرق للتقدير وهي طريقة الإمكان الأعظم MLE وطريقة المربعات الصغرى العادية OLS وطريقة المربعات الصغرى المرجحة WLS وطريقة كرامر - فون - ميزس CVM بناءاً علي 1000 تكرار بعينات عشوائية مختلفة لإتباع البيانات التي تم إنشاؤها من توزيع (WIG)، حيث يتم توزيع x_i كتوزيع (WIG) لمعلمات مختلفة (b،α,λ,β) بقيم فعلية مختلفة لكل معلمة ولعينات مختلفة الأحجام حيث كانت n=50,100,200,500 وقد قامت الباحثة بمقارنة أداء طرق التقدير المختلفة MLE، OLS، WLS، CVM بناءاً على بعض معايير الجودة وهي: الخطأ المعياري Standard Error (S.E) ومقدار التحيز Bias وجذر متوسط مربعات الخطأ Root Mean Square (RMSE) لأحجام عينات مختلفة، كما تم حساب متوسط التقديرات Mean Estimation (ME) لكل تقدير عن طريق استخدام الحزمة الإحصائية MathCAD (15)، وفي ثلاث حالات مختلفة كما يلي:

I:$\lambda=0.3,\alpha=2.5,\beta=1.2,b=4$

II:$\lambda=0.5,\alpha=1.5,\beta=1.2,b=2$

III:$\lambda=0.2,\alpha=0.7,\beta=1.5,b=1.2$

من خلال مناقشة نتائج المحاكاة في الحالات الثلاثة لتوزيع (WIG) توصلت الدراسة للآتي:

١- تبين أن قيم المقدرات b،α,λ, β تقترب بدرجة عالية من القيم الفعلية لمعالم توزيع (WIG) عند زيادة حجم العينة بالنسة لكل طرق التقدير.
٢- كلما زاد حجم العينة زادت جودة التقدير باستخدام طرق التقدير المختلفة وذلك من خلال تناقص قيم معايير جودة النموذج الخطأ المعياري Standard Error (S.E) ومقدار التحيز Bias وجذر متوسط مربعات الخطأ Root Mean Square (RMSE) مما يتفق مع النظرية الإحصائية.
٣- بشكل عام تبين أفضلية طريقة الإمكان الأعظم MLE عن باقي طرق التقدير المستخدمة لأحجام عينات مختلفة وذلك من خلال نسبة الكفاءة لتقدير معالم توزيع (WIG) في ظل وجود المجموعات الثلاثة.

(6) التطبيق العملي لتوزيع (WIG)

يتضمن هذا الجزء إثبات مرونة توزيع (WIG) بالتطبيق على مجموعتين مختلفتين من البيانات حيث تم فى البداية تقدير معالم توزيع (WIG) عددياً باستخدام الإمكان الأعظم باستخدام الحزمة الرياضية MathCAD(15) ، كما تم استخدام تلك التقديرات في التأكد من جودة وملائمة البيانات للتوزيع الجديد (WIG) من خلال استخدام اختبار كولومجروف-سميرنوف وحساب قيمة (P-Value) واستخدام بعض مقاييس جودة التوفيق المستخدمة في معظم الدراسات المتعلقة بموضوع الدراسة مثل (W^*, A^* , AIC , BIC, CAIC, HQIC) لمقارنة التوزيع الجديد (WIG) ببعض التوزيعات الأخرى وهي: وايبل معكوس لوماكس Weibull Inverse Lomax (WIL) ، Weibull Burr Type X (W-BTX) ، معكوس جومبرتز Inverse Gompertz (IG) ،

Kumaraswamy Inverse Gompertz (KIG) ، Inverse Power Gompertz (IPG) و تأخذ دوال الكثافة الاحتمالية لهذه التوزيعات الصور التالية:

$$\text{WIL: } f(x, a, b, \lambda, \beta) = ab\lambda\beta^{-\lambda b}\, x^{\lambda b-1}\left(1+\frac{x}{\beta}\right)^{-(\lambda b+1)}$$

$$\left(1-\left(1+\frac{\beta}{x}\right)^{-\lambda}\right)^{-(b+1)} e^{-a\left[\left(1+\frac{\beta}{x}\right)^{\lambda,}-1\right]^{-b}}$$

$$\text{W-BTX: } f(x, \alpha, \beta, \lambda, \theta) = 2\alpha\,\beta\,\theta\,\lambda^2\, e^{-(\lambda x)^2}\, \frac{\left(1-e^{-(\lambda x)^2}\right)^{\theta\beta-1}}{\left(1-\left(1-e^{-(\lambda x)^2}\right)^{\theta}\right)^{\beta+1}}$$

$$e^{-\alpha\left[\frac{\left(1-e^{-(\lambda x)^2}\right)^{\theta}}{1-\left(1-e^{-(\lambda x)^2}\right)^{\theta}}\right]^{\beta}}$$

$$\text{IG: } f(x, \alpha, \beta) = \frac{\alpha}{x^2} e^{\frac{-\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}-1}\right)+\frac{\beta}{x}}$$

$$\text{PIG: } f(x, a, \theta, \beta) = \frac{\alpha\theta\beta}{X^{(\alpha+1)}} EXP\left\{-\theta\left(e^{\frac{\beta}{x^{\alpha}}}-1\right)+\frac{\beta}{x^{\alpha}}\right\}$$

$$\text{KIG: } f(x, \alpha, \theta, \beta) = \frac{\alpha\theta}{x^2}\, e^{\frac{\beta}{x}}\, e^{\frac{-\alpha}{\beta}(e^{\frac{\beta}{x}}-1)}\left(1-e^{\frac{-\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}\right)^{\theta-1}$$

كما تم تقدير معلمات التوزيع الجديد (WIG) باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية (Ordinary Least -Square (OLS وطريقة المربعات الصغرى المرجحة Weighted Least –Square (WLS) وطريقة كرامر- فون ميزس (CVM) باستخدام برنامج MathCAD(15) وذلك بالتطبيق على المجموعة الثانية من البيانات ثم تم استخدام تلك التقديرات فى التأكد من جودة توفيق التوزيع الجديد (WIG) باستخدام بعض مقاييس جودة التوفيق المستخدمة في معظم الدراسات المتعلقة بموضوع الدراسة وهي ($W^*, A^*, P-Value, K.S$) ومقارنة نتائج طرق التقدير المختلفة (MLE, OLS, WLS,CVM) لإيجاد أفضل طريقة لتقدير معالم التوزيع الجديد (WIG).

المجموعة الأولى من البيانات

تحتوي هذه المجموعة على بيانات تتضمن 134 مشاهدة من بيانات العلوم السلوكية لدرجات التصنيف العام للأعراض العاطفية لمرحلة ما قبل المدرسة والتي جمعت بواسطة Balakrishnan and Aggarwala (2010)

جدول (1) يوضح تقديرات الإمكان الأعظم لمعالم توزيع (WIG) والتوزيعات المقارنة للمجموعة الأولي من البيانات.

التوزيع	تقديرات الإمكان الأعظم				
	λ	α	β	b	θ
WIG	0.494 (0.167)	0.00012 (0.0079)	318.8 (117.77)	0.313 (0.097)	-
IG	-	0.156 (0.072)	151.62 (10.88)	-	-
PIG	-	5.904 (0.019)	0.001118 (481.464)	-	0.000801 (0.00034)
KIG	1.596 (0.638)	0.871 (1.047)	115.8 (25.461)	-	-
W-BTX	0.001688 (0.002278)	5.355 (11.897)	9.465 (4.564)	- -	0.128 (0.073)
WIL	2.769 (0.589)	4.571 (0.805)	1.879 (0.336)	4.088 (0.264)	

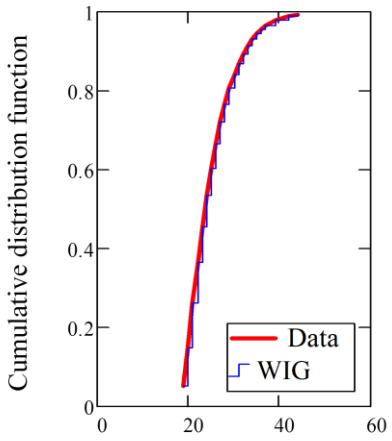
يتضح من الجدول السابق رقم (1) تقديرات الإمكان الأعظم لمعالم التوزيع الجديد (WIG) ذو الأربعة معالم، وايضاً تقديرات طريقة الإمكان الأعظم للتوزيعات المقارنة وهي (IG)، (PIG)، (KIG)، (W-BTX)، (WIL) وذلك اعتماداً على المجموعة الأولى من البيانات.

جدول (2) بعض مقاييس جودة التوفيق لتوزيع (WIG) والتوزيعات المقارنة للمجموعة الأولى من البيانات

التوزيع	مقاييس جودة التوفيق								
	-2L	AIC	BIC	HQIC	CAIC	K.S	P-Value	A^*	W^*
WIG	765.408	773.408	784.999	778.118	773.718	0.075	0.439	0.80	0.082
IG	786.746	790.745	796.541	793.101	790.837	0.098	0.158	1.722	0.237
PIG	786.796	792.797	801.49	796.329	792.981	0.0.093	0.198	1.37	0.18
KIG	786.366	792.367	801.06	795.9	792.552	0.099	0.146	1.52	0.208
W-BTX	854.604	862.914	874.195	867.314	862.914	0.192	0.000106	5.2	0.85
WIL	842.806	850.925	862.517	855.636	851.235	0.177	0.000445	4.611	0.738

يتضح من الجدول رقم (٢) أن توزيع (WIG) أفضل في توفيق هذه البيانات من التوزيعات المقارنة [(IG), (PIG), (KIG), (W − BTX), (WIL)] حيث أن توزيع (WIG) له أقل قيمة للإحصاءات $(W^*, A^*, K.S)$ كما أنه له أعلي قيمة عند P-value من خلال مقاييس (AIC، BIC، HQIC،CAIC) تبين أن توزيع (WIG) يحقق أقل قيم مقارنة بالتوزيعات الأخرى مما يثبت كفاءة التوزيع الجديد.

ومن خلال رسم دالة التوزيع التجمعية للتعميم الجديد (WIG) لمجموعة البيانات الأولى يتضح أن التعميم الجديد (WIG) قادر علي توفيق البيانات بشكل جيد مقارنة بالتوزيعات الأخري ويظهر ذلك في الشكل (5)



شكل(٥): توفيق دالة Cdf لتوزيع (WIG) للمجموعة الأولى من البيانات

المجموعة الثانية من البيانات

هي مجموعة بيانات خاصة بأوقات البقاء Lifetime لوثائق التأمينات الخاصة بحالات الوفاة المبكرة للأشخاص المؤمن عليهم لدي شركة مصر لتأمينات الحياة في الفترة من 1/1/2009 إلى 1/1/2019 العدل (٢٠٢٠)

يوضح الجدول التالي رقم (3) تقديرات الإمكان الأعظم لمعالم التوزيع الجديد (WIG) ذو الأربعة معالم، وايضاً تقديرات طريقة الإمكان الأعظم للتوزيعات المقارنة وهي (IG)، (PIG)، (KIG)، (W-BTX)، (WIL) وذلك اعتماداً علي المجموعة الثانية من البيانات.

جدول(3) يوضح تقديرات الإمكان الأعظم لمعالم توزيع (WIG) والتوزيعات المقارنة للمجموعة الثانية من البيانات

التوزيع	تقديرات الإمكان الأعظم				
	λ	α	β	b	θ
WIG	0.00398 (0.0080)	0.0750 (0.082)	-0.0714 (0.062)	1.8529 (0.163)	-
IG	-	0.884 (0.102)	-0.134 (0.034)	-	-
PIG	-	0.0856 (0.0054)	0.008109 (0.562)	-	85.46 (59.15)
KIG	3.726 (0.818)	2.205 (0.33)	-0.292 (0.057)	-	-
W-BTX	0.124 (0.075)	24.839 (25.63)	0.54 (0.156)	-	1.744 (0.551)
WIL	33.333 (16.378)	7.335 (4.818)	0.00589 0 .0039	1.79 (0.151)	

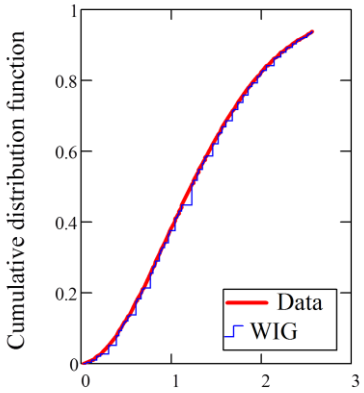
جدول (4) بعض مقاييس جودة التوفيق لتوزيع (WIG) والتوزيعات المقارنة للمجموعة الثانية من البيانات

التوزيع	مقاييس جودة التوفيق								
	-2L	AIC	BIC	HQIC	CAIC	K.S	P-Value	A^*	W^*
WIG	**212.078**	**220.07**	**230.49**	**224.29**	**220.49**	**0.082**	**0.50529**	**0.80**	**0.09**
IG	**291.823**	**295.823**	**301.033**	**297.931**	**295.946**	**0.285**	**0.00000018**	**4.476**	**0.683**
PIG	**320.559**	**326.559**	**334.374**	**329.722**	**326.809**	**0.267**	**0.0000013**	**1.792**	**0.316**
KIG	**249.844**	**255.489**	**263.304**	**258.652**	**255.739**	**0.112**	**0.163**	**2.319**	**0.321**
W-BTX	**212.278**	**220.279**	**230.7**	**224.96**	**220.7**	**0.085**	**0.464**	**0.848**	**0.095**
WIL	**213.187**	**221.174**	**231.594**	**225.391**	**221.595**	**0.088**	**0.41**	**0.889**	**0.98**

يتضح من الجدول رقم (٤) أن توزيع (WIG) أفضل في توفيق هذه البيانات من التوزيعات المقارنة $[(IG), (PIG), (KIG), (W-BTX), (WIL)]$ حيث أن توزيع (WIG) له أقل قيمة للإحصاءات $(W^*, A^*, K.S)$ كما أنه له أعلي قيمة عند P-value من خلال مقاييس (AIC،

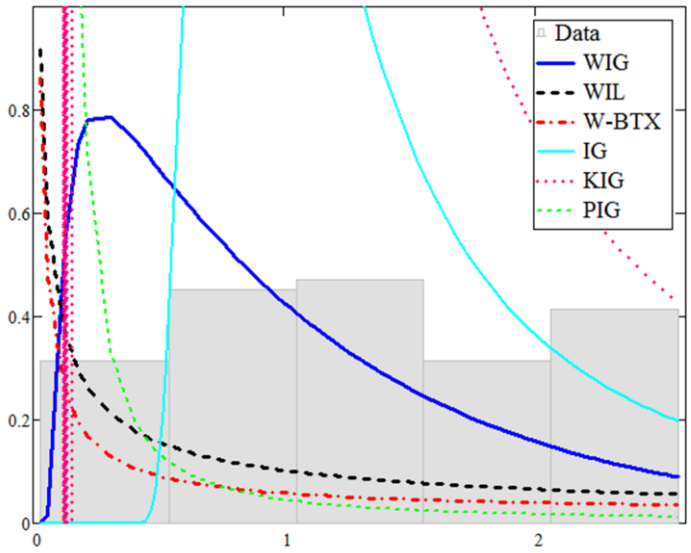
BIC، HQIC،CAIC) تبين أن توزيع (WIG) يحقق أقل قيم مقارنة بالتوزيعات الأخرى مما يثبت كفاءة التوزيع الجديد.

ومن خلال رسم دالة التوزيع التجمعية للتعميم الجديد (WIG) لمجموعة البيانات الثانية يتضح أن التعميم الجديد (WIG) قادر علي توفيق البيانات بشكل جيد مقارنة بالتوزيعات الأخري ويظهر ذلك في الشكل (6)



شكل(٦): توفيق دالة Cdf لتوزيع (WIG) للمجموعة الثانية من البيانات

وأيضاً تم رسم دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع (WIG) ودوال الكثافة الاحتمالية للتوزيعات المقارنة ومقارنتها برسم histogram pdf لمجموعة البيانات الثانية محل الدراسة تبين أن توزيع (WIG) له مرونة أكثر في توفيق البيانات مقارنة بالتوزيعات (IG, PIG,KIG,W-BTX,WIL) ويتضح ذلك فى الشكل كالتالى:



شكل (٧): توفيق دالة pdf لتوزيع (WIG) والتوزيعات المقارنة للمجموعة الثانية من البيانات

جدول (٥) يوضح قيم بعض مقايس جودة التوفيق لتوزيع (WIG) للمجموعة الثانية من البيانات باستخدام طرق التقدير (الإمكان الأعظم، المربعات الصغري العادية ، المربعات الصغري المرجحة ، كرامر – فون ميزس)

Model	Methods	Estimates			
		K.S	P-Value	w^*	A^*
WIG (λ,α,β,b)	MLE	0.08	0.54	0.09	0.819
	OLS	0.096	0.316	0.248	1.972
	WIS	0.083	0.49	0.168	1.379
	CVM	0.565	0	0.477	3.288

يوضح جدول (٥) أن مقدر الإمكان الأعظم للمجموعة الثانية من البيانات هو أفضل مقدر لتقدير معالم توزيع (WIG) وفقاً لجميع مقاييس جودة التوفيق المستخدمة حيث أن مقدر طريقة الإمكان الأعظم (MLE) له أقل قيمة للمقاييس (w^*، A^* ، K.S) وأعلي قيمة لمقياس .P-Value

(٧) النتائج

فى هذه الدراسة تم الحصول على تعميم جديد لتوزيع معكوس جومبرتز (IG) باستخدام عائلة وايبل المعممة (W-G) يسمى Weibul Inverse Gompertz Distribution (WIG) ودراسة بعض الخصائص الهيكلية للتعميم الجديد (WIG) مثل دالة معدل الخطر ودالة معدل الخطر التجميعية ودالة البقاء ودالة الكوانتيل والعزوم والإحصاءات الترتيبية والعزوم وغيرها وتم تقدير معالم التعميم الجديد (WIG) باستخدام أربعة طرق تقدير مختلفة، وهي: طريقة الإمكان الأعظم (MLE) وطريقة المربعات الصغرى العادية (OLS) وطريقة المربعات الصغرى المرجحة (WLS) وطريقة كرامر- فون ميزس (CVM) وتم تقديم دراسة محاكاة لتوزيع (WIG) لمقارنة أداء مختلف المقدرات وهذا باستخدام الحزمة الإحصائية MathCAD (15) حيث أظهرت نتائج المحاكاة أن الأفضلية لطريقة الإمكان الأعظم MLE في التقدير عن باقي الطرق المستخدمة لأحجام العينات المختلفة حيث تحتوي على أقل قيم لمعايير جودة النموذج وتم اثبات كفاءة التعميم الجديد (WIG) من خلال التطبيق على مجموعتين مختلفتين من البيانات وذلك باستخدام بعض مقايس جودة التوفيق (AIC، BIC ،HQIC ،CAIC ،P-Value ،w^* ،A^*) وأجادت الدراسة مقارنة التعميم الجديد (WIG) بكل من التوزيعات (IG, PIG,KIG,W-BTX,WIL) وتم التوصل إلى أن التعميم الجديد (WIG) يعطى دقة أعلى في توفيق مجموعتى البيانات محل الدراسة وأثبتت الدراسة عن طريق المقارنة بين نتائج طرق التقدير أن مقدر الإمكان الأعظم (MLE) هو أفضل مقدر لتقدير معالم توزيع (WIG) وفقاً لجميع مقايس جودة التوفيق المستخدمة في الدراسة حيث أن مقدر الإمكان الأعظم له أقل قيمة للمقاييس (AIC، BIC ،HQIC ،CAIC ،K.S ،w^* ،A^*) وأعلى قيمة لمقياس P-Value وذلك بالتطبيق على المجموعة الثانية من البيانات.

المراجع:

1. Abdelhady, D. H., & Amer, Y. M. (2020). On the Inverse Power Gompertz Distribution. *Annals of Data Science*, 1-23.

2. Adegoke, T. M., Obisesan, K. O., Oladoja, O. M., & Adegoke, G. K. (2023b). BAYESIAN AND CLASSICAL ESTIMATIONS OF TRANSMUTED INVERSE GOMPERTZ DISTRIBUTION. *Reliability: Theory & Applications*, *18*(2 (73)), 207-222.
3. Adegoke, T. M., Oladoja, O. M., Bashiru, S. O., Mustapha, A. A., Aderupatan, D. E., & Nzei, L. C. (2023a). TOPP-LEONE INVERSE GOMPERTZ DISTRIBUTION: PROPERTIES AND DIFFERENT ESTIMATIONS TECHNIQUES AND APPLICATIONS. *Pakistan Journal of Statistics*, *39*(4).
4. Balakrishnan, N., Victor, L., & Antonio, S. (2010). A mixture model based on Birnhaum-Saunders Distributions. *A study conducted by Authors regarding the Scores of the GRASP (General Rating of Affective Symptoms for Preschoolers), in a city located at South Part of the Chile*.
5. Bourguignon, M., Silva, R. B., & Cordeiro, G. M. (2014). The Weibull-G family of probability distributions. *Journal of data science*, *12*(1), 53-68.
6. El-Gohary, A., Alshamrani, A., & Al-Otaibi, A. N. (2013). The generalized Gompertz distribution. *Applied mathematical modelling*, *37*(1-2), 13-24.
7. Eliwa, M. S., El-Morshedy, M., & Ibrahim, M. (2019). Inverse Gompertz distribution: properties and different estimation methods with application to complete and censored data. *Annals of Data Science*, *6*(2), 321-339
8. El-Morshedy, M., El-Faheem, A. A., & El-Dawoody, M. (2020). Kumaraswamy inverse Gompertz distribution: Properties and engineering applications to complete, type-II right censored and upper record data. *Plos one*, *15*(12), e024197
9. Elshahhat, A., Aljohani, H. M., & Afify, A. Z. (2021). Bayesian and classical inference under type-II censored samples of the extended inverse gompertz distribution with engineering applications. *Entropy*, *23*(12), 1578.
10. Hassan, A. S., & Mohamed, R. E. (2019). Weibull inverse Lomax distribution. *Pakistan Journal of Statistics and Operation Research*, 587-603.

11. Mittal, S., Durak, U., & Ören, T. (Eds.). (2017). *Guide to simulation-based disciplines: Advancing our computational future*. Springer.
12. Taniş, C., & Karakaya, K. (2021). A comparison of estimation methods for one parameter inverse Gompertz distribution. *Journal of Science and Arts*, *21*(3), 659-668.
١٣. العدل، سإلى أبو العنين المغاوري محمد (٢٠٢٠)، "تعميم جديد مقترح لتوزيع فريشت- دراسة تطبيقية"، رسالة دكتوراه، كلية التجارة، جامعة المنصورة.

الملاحق

نتائج المحاكاة للحالات الثلاثة:

جدول (5) يوضح متوسط التقديرات ومعايير الجودة لمعالم توزيع (WIG)عند أحجام العينات المختلفة والقيم الافتراضية للمعالم (I)

(I:λ=0.3,α=2.5,β=1.2,b=4)						
n	Methods		ME	Bias	RMSE	S.E
50	MLE	α	2.161	-0.339	0.644	0.011
		λ	0.424	0.124	0.548	0.011
		β	2.569	1.369	4.233	0.08
		b	3.985	-0.015	1.573	0.031
	OLS	α	2.3	-0.2	0.512	0.009424
		λ	0.304	0.004064	0.282	0.0056
		β	1.409	0.209	2.569	0.051
		b	4.116	0.116	1.115	0.022
	WLS	α	2.969	0.469	1.564	0.03
		λ	0.655	0.355	1.329	0.026
		β	1.282	0.082	5.627	0.113
		b	4.801	0.801	3.054	0.059
	CVM	α	2.296	-0.204	0.538	0.00994
		λ	0.308	0.008242	0.277	0.005538
		β	1.489	0.289	2.63	0.052
		b	4.212	0.212	1.176	0.023
100	MLE	α	2.282	-0.218	0.524	0.00476
		λ	0.502	0.202	0.754	0.00726
		β	2.339	1.139	3.481	0.033
		b	3.866	-0.134	1.362	0.014
	OLS	α	2.289	-0.211	0.5	0.00453
		λ	0.302	0.002245	0.243	0.00242
		β	1.453	0.253	2.258	0.022

		b	4.096	0.096	0.946	0.009412
	WLS	α	2.716	0.216	1.006	0.0098
		λ	0.435	0.135	0.48	0.0046
		β	1.258	0.058	3.73	0.037
		b	4.325	0.325	1.733	0.017
	CVM	α	2.298	-0.202	0.503	0.0046
		λ	0.302	0.00188	0.241	0.00241
		β	1.44	0.249	2.284	0.023
		b	4.161	0.161	0.977	0.00963
200	MLE	α	2.346	-0.154	0.439	0.0020
		λ	0.594	0.294	0.847	0.0039
		β	2.353	1.153	2.912	0.013
		b	3.664	-0.336	1.238	0.00595
	OLS	α	2.376	-0.124	0.397	0.00188
		λ	0.298	-0.00179	0.188	0.00094
		β	1.322	0.122	1.796	0.0089
		b	4.078	0.078	0.78	0.00388
	WLS	α	2.579	0.079	0.69	0.0034
		λ	0.369	0.069	0.227	0.0082
		β	1.341	0.141	2.643	0.013
		b	4.12	0.12	1.166	0.0058
	CVM	α	2.33	-0.17	0.447	0.00206
		λ	0.298	-0.00212	0.196	0.000978
		β	1.401	0.201	1.845	0.00917
		b	4.089	0.089	0.788	0.003917
500	MLE	α	2.326	-0.174	0.442	0.00812
		λ	0.759	0.459	0.956	0.00167
		β	2.927	1.727	3.032	0.004984
		b	3.309	-0.691-	1.31	0.00222
	OLS	α	2.406	-0.094	0.34	0.00065
		λ	0.293	-0.00716	0.147	0.00029
		β	1.253	0.053	1.409	0.0028
		b	4.07	0.07	0.64	0.00127
	WLS	α	2.525	0.025	0.464	0.00092
		λ	0.329	0.029	0.128	0.00024
		β	1.25	0.051	1.674	0.003347
		b	4.056	0.056	0.732	0.0014

	CVM	α	2.414	-0.086	0.322	0.000621
		λ	0.294	-0.0058	0.139	0.00027
		β	1.256	0.056	1.336	0.00266
		b	4.072	0.072	0.618	0.0012

المصدر: نتائج محاكاة مونت كارلو باستخدام برنامج الماسكاد

جدول (6) يوضح متوسط التقديرات ومعايير الجودة لمعالم توزيع (WIG)عند أحجام العينات المختلفة والقيم الافتراضية للمعالم (II)

(II:λ=0.5,α=1.5,β=1.2b=2)						
n	Methods		ME	Bias	RMSE	S.E
50	MLE	α	1.46	-0.04	2.022	0.04
		λ	0.744	0.244	1.82	0.036
		β	1.833	0.633	1.684	0.031
		b	1.992	-0.0079	0.647	0.013
	OLS	α	1.07	1.407	-0.093	0.284
		λ	0.508	0.0078	0.389	0.00777
		β	1.163	-0.037	1.664	0.033
		b	2.157	0.157	0.795	0.016
	WLS	α	2.628	1.128	4.138	0.08
		λ	2.136	1.636	6.684	0.13
		β	0.928	-0.272	1.924	0.038
		b	2.088	0.088	0.893	0.018
	CVM	α	1.384	-0.116	0.306	0.0056
		λ	0.518	0.018	0.408	0.008144
		β	1.288	0.088	1.788	0.036
		b	2.189	0.189	0.856	0.017
100	MLE	α	1.966	0.466	2.867	0.028
		λ	1.256	0.756	2.713	0.026
		β	1.612	0.412	1.142	0.011
		b	1.879	-0.121	0.516	0.00502
	OLS	α	1.428	-0.072	0.262	0.00252
		λ	0.512	0.012	0.337	0.0033
		β	1.198	-0.0016	1.278	0.013
		b	2.1	0.1.	0.596	0.0058
	WLS	α	2.53	1.03	3.727	0.036
		λ	2.345	1.845	6.775	0.065
		β	1.03	-0.17	1.255	0.012

		b	1.976	-0.024	0.588	0.00587
	CVM	α	1.43	-0.07	0.241	0.00230
		λ	0.513	0.013	0.322	0.00321
		β	1.239	0.039	1.34	0.013
		b	2.12	0.12	0.607	0.0059
200	MLE	α	2.454	0.954	3.89	0.019
		λ	1.905	1.405	3.905	0.018
		β	1.364	0.164	0.856	0.0042
		b	1.827	-0.173	0.486	0.002269
	OLS	α	1.446	-0.054	0.208	0.00100
		λ	0.501	0.00121	0.245	0.00122
		β	1.211	0.011	0.995	0.0049
		b	2.064	0.064	0.462	0.00228
	WLS	α	2.306	0.806	3.261	0.016
		λ	2.198	1.698	6.562	0.032
		β	1.084	-0.116	0.929	0.0046
		b	1.953	-0.047	0.436	0.002165
	CVM	α	1.443	-0.057	0.203	0.0009
		λ	0.506	0.0056	0.233	0.001163
		β	1.265	0.065	0.983	0.00490
		b	2.051	0.051	0.45	0.00223
500	MLE	α	2.82	1.32	2.832	0.005
		λ	2.839	2.339	4.574	0.0078
		β	1.114	-0.086	0.669	0.0013
		b	1.742	-0.258	0.472	0.000790
	OLS	α	1.485	-0.015	0.121	0.00024
		λ	0.505	0.0050	0.154	0.00030
		β	1.21	0.0095	0.643	0.00128
		b	2.02	0.02	0.283	0.00056
	WLS	α	2.206	0.706	2.63	0.0050
		λ	2.131	1.631	5.942	0.011
		β	1.047	-0.153	0.693	0.001351
		b	1.947	-0.053	0.317	0.000625
	CVM	α	1.478	-0.022	0.134	0.00026
		λ	0.502	0.00244	0.16	0.00032
		β	1.211	0.011	0.642	0.001283
		b	2.026	0.026	0.286	0.000568

المصدر: نتائج محاكاة مونت كارلو باستخدام برنامج الماسكاد

جدول (7) يوضح متوسط التقديرات ومعايير الجودة لمعالم توزيع (WIG)عند أحجام العينات المختلفة والقيم الافتراضية للمعالم (III)

(III:λ=0.2,α=0.7,β=1.5,b=1.2)						
n	Methods		ME	Bias	RMSE	S.E
50	MLE	α	0.734	0.034	1.249	0.025
		λ	0.298	0.098	0.715	0.014
		β	2.094	0.594	1.367	0.025
		b	1.166	-0.034	0.262	0.00519
	OLS	α	0.68	-0.02	0.153	0.00302
		λ	0.22	0.02	0.161	0.032
		β	1.539	0.039	1.347	0.027
		b	1.25	0.05	0.368	0.00729
	WLS	α	2.114	1.414	5.021	0.096
		λ	0.788	0.588	1.851	0.035
		β	1.257	-0.243	1.468	0.029
		b	1.168	-0.032	0.364	0.00724
	CVM	α	0.676	-0.024	0.138	0.00271
		λ	0.217	0.017	0.0138	0.002748
		β	1.58	0.08	1.278	0.026
		b	1.256	0.056	0.361	0.00713
100	MLE	α	0.907	0.207	1.396	0.014
		λ	0.378	0.178	0.7 71	0.00750
		β	1.869	0.369	1.004	0.00937
		b	1.149	-0.051	0.178	0.0017
	OLS	α	0.685	-0.015	0.137	0.0013
		λ	0.211	0.011	0.108	0.00107
		β	1.559	0.059	0.968	0.00966
		b	1.217	0.017	0.248	0.00247
	WLS	α	2.27	1.57	4.574	0.043
		λ	0.959	0.759	1.984	0.018
		β	1.104	-0.336	1.208	0.012
		b	1.134	-0.066	0.28	0.0027
	CVM	α	0.68	-0.02	0.117	0.001152
		λ	0.209	0.0088	0.098	0.00097
		β	1.582	0.082	0.951	0.0094

		b	1.228	0.028	0.252	0.00250
200	MLE	α	0.908	0.208	1.19	0.0058
		λ	0.36	0.163	0.661	0.0032
		β	1.729	0.229	0.848	0.00408
		b	1.15	-0.043	0.133	0.000627
	OLS	α	0.692	-0.00758	0.101	0.000502
		λ	0.206	0.0059	0.074	0.000366
		β	1.532	0.032	0.695	0.00347
		b	1.209	0.008807	0.179	0.00089
	WLS	α	1.653	0.953	2.488	0.011
		λ	0.727	0.527	1.348	0.0062
		β	1.188	-0.312	0.958	0.00452
		b	1.153	-0.047	0.193	0.00093
	CVM	α	0.692	-0.0078	0.079	0.00039
		λ	0.205	0.00514	0.067	0.00033
		β	1.552	0.052	0.691	0.00344
		b	1.21	0.014	0.178	0.00088
500	MLE	α	0.832	0.132	0.795	0.0015
		λ	0.298	0.098	0.397	0.00077
		β	1.647	0.147	0.696	0.00136
		b	1.17	-0.03	0.085	0.000159
	OLS	α	0.699	-0.0014	0.047	0.00009
		λ	0.203	0.0034	0.04	0.000079
		β	1.518	0.018	0.428	0.00085
		b	1.2	-0.000024	0.155	0.000209
	WLS	α	1.4	0.7	1.621	0.00292
		λ	0.579	0.379	0.9	0.0016
		β	1.198	-0302	0.771	0.00142
		b	1.16	-0.04	0.126	0.0023
	CVM	α	0.699	-0.001193	0.049	0.000097
		λ	0.203	0.00319	0.04	0.00008
		β	1.526	0.026	0.435	0.00086
		b	1.203	0.0032	0.111	0.00022

المصدر: نتائج محاكاة مونت كارلو باستخدام برنامج الماسكاد

Estimating Parameters of a generalized Weibull Inverse Gompertz distribution using some different estimation methods (Applied Study)

Dr. Mohamed Ibrahim; Dr. Magdi Ali and Mariam Donia

Abstract:

This study aims to obtain a new generalization of the Inverse Gompertz distribution to have the ability to reconcile many life phenomena with higher accuracy compared to other generalizations.

In this study, a new generalization of the Weibull Inverse Gompertz (IG) distribution was presented through the use of the Weibull Generated Family (W-G) and it is called the Weibull Inverse Gompertz (WIG) distribution. Some statistical properties of the new generalization (WIG) were also obtained, such as the quantile function, moments, and ordinal statistics. . It has also been proven that the probability density function can be expressed as a linear function of the density functions of the Inverse Gompertz distribution. The distribution parameters were also estimated through the use of four different estimation methods, namely the maximum likelihood method, the ordinary-least squares method, the weighted- least squares method, and the Cramer-von Mises method, and a simulation study was presented to evaluate the performance of the estimators.

Furthermore, the new generalization was applied to two different data sets. The first set is a behavioral science dataset of 134 size for the general classification of preschool emotional symptom scores, and the second set includes data on the lifetime of premature death insurance policies of people insured by the Misr Company for life insurance in the period from 1/1/2009 to 1/1/2019. The study proved the flexibility and efficiency of the new generalization compared to five other distributions, according to some statistical goodness-of-fit measures.

Keywords:

Inverse Gompertz distribution-Weibull Generated Family - Moments - Quantile Function - Order Statistics - Maximum Likelihood Method - Ordinary Least Square Method - Weighted Least Square Method - Crammer –Von mises Method