# نمذجة بيانات مراقبة باستخدام توزيع عائلة وايبل المعممة: دراسة تطبيقية

بحث مُستَل من رسالة ماجستير في الإحصاء التطبيقي


إعداد

**أ.إهداء سامح عيد محمد عمارة**

باحثة ماجستير بقسم الإحصاء، كلية التجارة، جامعة دمياط

ehdaamohamed80@gmail.com

**د. محمد محمود نصر أبو ريا**

أستاذ الإحصاء، كلية التجارة، جامعة دمياط

**د. مجدي علي إبراهيم كرات**

مدرس الإحصاء، كلية التجارة، جامعة دمياط



**المجلة العلمية للدراسات والبحوث المالية والتجارية**

كلية التجارة – جامعة دمياط

**المجلد السادس ــ العدد الثاني ــ الجزء الرابع ــ يوليو ٢٠٢٥**

**التوثيق المقترح وفقاً لنظام APA:**

**عمارة**، إهداء سامح عيد؛ **أبو ريا**، محمد محمود نصر؛ **كرات**، مجدي علي إبراهيم .(٢٠٢٥). نمذجة بيانات مراقبة باستخدام توزيع عائلة وايبل المعممة: دراسة تطبيقية، **المجلة العلمية للدراسات والبحوث المالية والتجارية**، كلية التجارة، جامعة دمياط، ٦(٢)٤، ١-٢٩.

**رابط المجلة:** https://cfdj.journals.ekb.eg/

# نمذجة بيانات مراقبة باستخدام توزيع عائلة وايبل المعممة: دراسة تطبيقية

أ.إهداء سامح عيد محمد عمارة؛ د. محمد محمود نصر أبو ريا؛ د. مجدي علي إبراهيم كرات

## ملخص:

تعتبر التوزيعات الإحتمالية من الموضوعات الهامة في مجال الاحصاء لأهميتها في تحليل ونمذجة البيانات في العديد من العلوم، حيث أن بعض التوزيعات الكلاسيكية غير مناسبة لوصف بعض البيانات والظواهر الحقيقية.

تهدف هذه الدراسة إلى تقديم تعميم جديد لتوزيع (A) من خلال استخدام عائلة وايبل المعممة(Weibull Generated Family (W-G ويسمي توزيع (WA) وتم الحصول على مختلف الخصائص الهيكلية للتعميم الجديد، كما تم تقدير معالم التوزيع الجديد من خلال استخدام اربعة طرق تقدير مختلفة وهي طريقة المربعات الصغرى وطريقة المربعات الصغرى المرجحة وطريقة الإمكان الأعظم وطريقة كرامر - فون ميزس. وتم تقديم دراسة محاكاة لتقييم أداء المقدرات بالإضافة لذلك تم التطبيق على مجموعتين مختلفتين من البيانات الحقيقية؛ تتكون بيانات المجموعة الأولى من بيانات قوة زجاج نافذة طائرة أما المجموعة الثانية فتتكون من بيانات القوة المقاسة لألياف الكربون المفردة وأثبتت الدراسة مرونة وكفاءة التعميم الجديد مقارنة بخمسة توزيعات أخرى وذلك طبقا لبعض مقاييس جودة التوفيق.

**الكلمات المفتاحية:**

توزيع A - عائلة وايبل المعممة - داله الكوانتيل - الإحصاءات الترتيبية – طريقة المربعات الصغرى العادية – طريقة المربعات الصغرى المرجحة – طريقة الامكان الأعظم -طريقة كرامر فون ميزس

## (١) مقدمة:

يعتبر الإستدلال الإحصائي أحد فروع الإحصاء، حيث يتلخص ميول الإحصائيين في إستنتاج الخصائص من خلال إجراء تجربة يتم فيها تحليل البيانات التي تم الحصول عليها من عينة تم اختيارها من المجتمع موضوع الدراسة.

لقد وضعت الدراسات الخاصة بجمع البيانات معظم الاهتمام على تحليل بيانات زمن الحياة lifetime data analysis وتعتبر هذه الفترة الزمنية من نقطة البداية حتى وقت الفشل.على سبيل المثال؛ في مجال الطب يمكن القول أن الزمن من وقت ولادة الفرد حتى وقت وفاته وفي مجال الهندسة يمكن القول أن الزمن من وقت إستخدام أي آلة حتى وقت فشلها. حيث يمكننا إيجاد البيانات اللازمة حتى وقت الفشل (أزمة الفشل).

يتركز إهتمام الاحصائيين على تعميم التوزيعات للحصول على توزيع إحصائي مناسب يكون أفضل في تمثيل البيانات ويكون أكثر مرونة من التوزيعات التقليدية، وتأخذ بيانات المراقبة Censored data موضع هام في العديد من المجالات العلمية مثل الطب والهندسة وغيرهم.

في دراسة Epstein&sobel(1953) تم أخذ عينة عشوائية تتكون من n عنصر من مجتمع مراد دراسته كالبطاريات ومجموعة من الماكينات في العمل وغيرها، ثم خضعت تحت إختبار الحياة فإنه مع الوقت يفشل كل عنصر بعد الأخر عند زمن يتم تحديده وتسجيله.

$x_{(1)} < x_{(2)} < \cdots < x_{(n)}$بداية من $x_{(1)}$ وهو زمن الفشل للعنصر الأقل متانة (الأضعف) بينهم، وهكذا... حتى تنتهي بزمن فشل العنصر الأخير $x_{(n)}$ حيث تعتبر النتائج عندئذ زمن الحياة للعنصر $x$والذي يعتبر عناصر العينة كإحصاءات ترتيبية مما ينبهنا إلى أهمية نظرية الإحصاء.

ويوضح Abdel-Hamid &Al-Hussaini (٢٠١٤) أنه يوجد أهمية كبيرة لإستخدام العينات المراقبة وذلك لأهميتها في مجالات الصلاحية وإختبارات الحياة.

**قسم Khfagy (٢٠١٤) العينات المراقبة إلى ثلاث أنواع أساسية:**

١) العينات المراقبة المفردة (أحادية المراحل) Single censored sample

٢) العينات المراقبة التتابعية (متعددة المراحل) Progressive censored sample

٣) العينات المراقبة الفترية Interval censored sample

ويعتمد تحديد نوع العينة على حصر الباحث للشروط وكذلك الإلمام بالدراسات السابقة.

ويقول Biswabrata & Gijo (٢٠١٣) أنه يوجد أسلوب مراقبة لكل نوع من عينات المراقبة إذا كانت من النوع الأول Type-I Censoring أو النوع الثاني Type-II Censoring أو المختلط Hybrid censoring.

وتعرف النمذجة بأنها مجموعة من العمليات والمعالجات لبناء نموذج يهدف لتسهيل ظاهرة مركبة ومعقدة، حيث أن هناك مجموعة هائلة من تقنيات النمذجة تستخدم لحل المشكلات Arkoub Nabila(2020)

ويأخذ هذا البحث بالنهج الذي قدمه Bourguignon et al.(2014) لتوليد توزيعات جديدة باستخدام عائلة Weibull Generated Family (W-G) حيث تأخذ دالة التوزيع التراكمي ودالة الكثافة الإحتمالية (علي الترتيب)الشكل الآتي:

$$F(X;\lambda,b)=1-e^{-\lambda(\frac{G(X)}{1-G(X)})^{b}} \quad X>0,\lambda,b>0 \qquad (1)$$

$$f(X;\lambda,b)=\lambda b(\frac{G(X)}{1-G(X)})^{b-1}\left(\frac{g(X)}{(1-G(X))^{2}}\right)e^{-\lambda(\frac{G(X)}{1-G(X)})^{b}} \qquad (2)$$

وتكون دالة معدل الخطر Hazard rate function للعائلة على الشكل الآتي:

$$h(X)=\frac{\lambda\, b\, g\,(x)G(x)^{b-1}}{(1-G(X))^{b+1}} \qquad (3)$$

وتعبر G(X) عن دالة التوزيع التراكمية وتمثل $g(X)=\frac{d}{dx}\,G(X)$

ويهدف هذا البحث إلي إشتقاق توزيع جديد يسمي توزيع (WA)ويعتبر أحد التعميمات الجديدة الخاصة بتوزيع (**A**)وذلك من خلال عائلة وايبل المعممة.

## (٢) توزيع (WA)

تأخذ دالة التوزيع التراكمية**Cdf**ودالة الكثافة الإحتمالية **Pdf**الخاصة بتوزيع (**A**)الشكل الآتي علي الترتيب:

$$F(X;\beta)=e^{\frac{1}{\beta}\left(1-e^{\frac{\beta}{x}}\right)} \quad X>0,\beta>0 \qquad (4)$$

$$f(X;\beta)=\frac{1}{X^{2}}\,e^{\frac{1}{\beta}\left(1-e^{\frac{\beta}{X}}\right)+\frac{\beta}{X}} \qquad (5)$$

فمن خلال التعويض بالمعادلة (٤)و (٥)في المعادلات (١) و(٢) سنحصل علي دالة التوزيع التراكمي Cdf ودالة الكثافة الإحتمالية Pdf علي النحو التالي:

$$F(x)=1-e^{-\lambda\left(\frac{e^{-\frac{1}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}}{1-e^{-\frac{1}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}}\right)^{b}} \quad \lambda,\ \beta \text{ and } b>0, X>0 \qquad (6)$$

$$f(x) = \lambda b \frac{1}{x^2} e^{\frac{-1}{B}\left(e^{\frac{B}{X}}-1\right)+\frac{B}{X}} \left( \frac{\left(e^{\frac{-1}{B}\left(e^{\frac{B}{X}}-1\right)}\right)^{b-1}}{\left(1-e^{\frac{-1}{B}\left(e^{\frac{B}{X}}-1\right)}\right)^{b+1}} \right) e^{-\lambda\left(\frac{e^{-\frac{1}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}}{1-e^{-\frac{1}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}}\right)^{b}} \quad (7)$$

وحيث أن دالة البقاء S(X)=1-F(X) فتأخذ دالة البقاء Survival function S(X) لتوزيع (WA)الشكل الآتي:

$$S(x) = e^{-\lambda\left(\frac{e^{-\frac{1}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}}{1-e^{-\frac{1}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}}\right)^{b}}$$

وحيث h(X)=f(X)/S(X) و H(X)=-log S(X) فإن دالة الخطر hazard rate function h(X) ودالة معدل الخطر التراكمية Cumulative hazard rate function H(X) لتوزيع (WA)تأخذ الشكل الآتي علي الترتيب:

$$h(x) = \lambda b \frac{1}{x^2} e^{\frac{B}{X}} \left( \frac{\left(e^{\frac{-1}{B}\left(e^{\frac{B}{X}}-1\right)}\right)^{b}}{\left(1-e^{\frac{-1}{B}\left(e^{\frac{B}{X}}-1\right)}\right)^{b+1}} \right)$$

$$H(x) = -\log\left(e^{-\lambda\left(\frac{e^{-\frac{1}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}}{1-e^{-\frac{1}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}}\right)^{b}}\right)$$

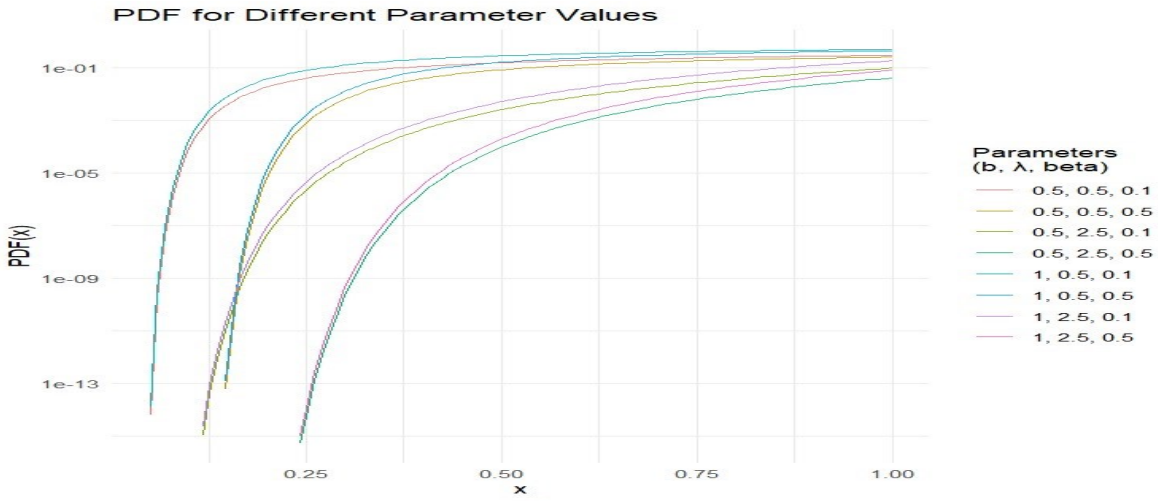
وحيث أن O(X)=F(X)/S(X) فتأخذ دالة Odd function O(X) لتوزيع(WA)الشكل الآتي:

$$O(X) = e^{-\lambda\left(\frac{e^{-\frac{1}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}}{1-e^{-\frac{1}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}}\right)^{-b}} - 1$$

وحيث أن r(X)=f(X)/F(X) فتأخذ دالة الخطر العكسية Reversed hazard rate function r(X)الشكل الآتي:

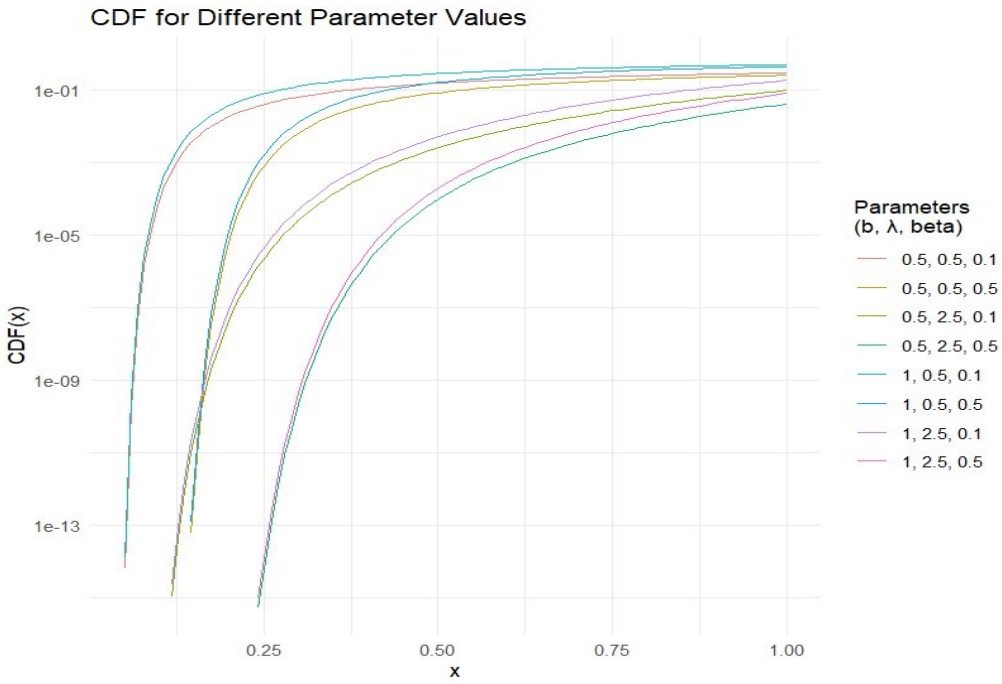
$$\mathbf{r}(x)=\frac{\lambda b\frac{1}{x^2}e^{\frac{B}{X}}\left(\frac{\left(e^{\frac{-1}{B}(e^{\frac{B}{X}}-1)}\right)^{b}}{\left(1-e^{\frac{-1}{B}\left(e^{\frac{B}{X}}-1\right)}\right)^{b+1}}\right)e^{-\lambda\left(\frac{e^{-\frac{1}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}}{1-e^{-\frac{1}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}}\right)^{b}}}{1-e^{-\lambda\left(\frac{e^{-\frac{1}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}}{1-e^{-\frac{1}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}}\right)^{b}}}$$

يعرض شكل (١) بعض الأشكال الممكنة لدالة كثافة الإحتمال Pdf عند قيم مختلفة للمعالم والشكل (٢) يوضح دالة التوزيع التراكمية Cdf كما يوضح الشكل (٣) دالة البقاء

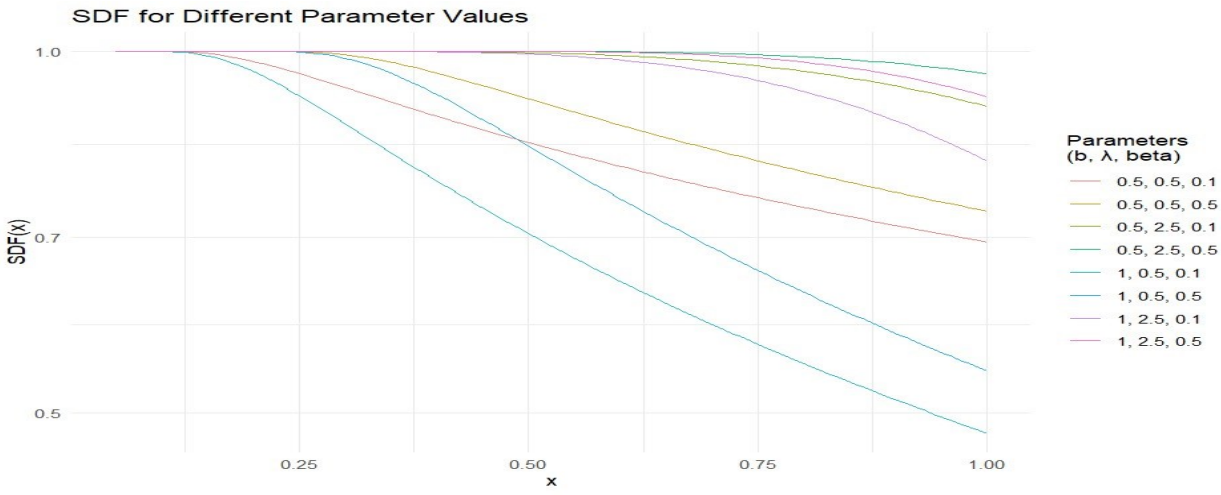



**شكل (١) دالة Pdf لتوزيع (WA)عند قيم مختلفة للمعالم**

X




**شكل (٢) دالة Cdf لتوزيع (WA)عند قيم مختلفة للمعالم**




**شكل (٣) دالة Sdf لتوزيع(WA)عند قيم مختلفة للمعالم**

## (٣) التمثيل الخطي لدالة الكثافة الإحتمالية لتوزيع (WA)

يتم عرض صورة أخري لدالة الكثافة الإحتمالية لتوزيع(WA)كتركيبة خطية من دوال الكثافة الإحتمالية لتوزيع(A)

وبالإعتماد علي مفكوك الدالة الأسية التالي:

$$e^{-\lambda\left(\frac{e^{-\frac{1}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}}{1-e^{-\frac{1}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}}\right)^{b}}=\sum_{h=0}^{\infty}(-1)^{h}\frac{\lambda^{h}}{h!}\frac{(e^{\frac{-1}{\beta}(e^{\frac{\beta}{x}}-1)})^{bh+b-1}}{(1-e^{\frac{-1}{\beta}(e^{\frac{\beta}{x}}-1)})^{bh+b+1}} \qquad (8)$$

وباستخدام المفكوك (٨) يمكن كتابة المعادلة (٧) علي الصورة الآتية:

$$f(x,\lambda,\beta,b)=\lambda b\frac{1}{x^{2}}e^{\frac{-1}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)+\frac{\beta}{x}}\sum_{h=0}^{\infty}(-1)^{h}\frac{\lambda^{h}}{h!}\frac{(e^{\frac{-1}{\beta}(e^{\frac{\beta}{x}}-1)})^{bh+b-1}}{(1-e^{\frac{-1}{\beta}(e^{\frac{\beta}{x}}-1)})^{bh+b+1}} \qquad (9)$$

يمكن كتابة دالة الكثافة الإحتمالية كالآتي:

$$f(x,\lambda,\beta,b)=\lambda b\frac{1}{x^{2}}e^{\frac{-1}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)+\frac{\beta}{x}}\sum_{h=0}^{\infty}(-1)^{h}\frac{\lambda^{h}}{h!}(e^{\frac{-1}{\beta}(e^{\frac{\beta}{x}}-1)})^{bh+b-1}(1-e^{\frac{-1}{\beta}(e^{\frac{\beta}{x}}-1)})^{-bh-b-1}$$

وبتطبيق نظرية ذي الحدين المعممة يمكننا كتابة الصورة الآتية:

$$\sum_{h,l=0}^{\infty}\frac{\Gamma(bh+b+l+1)}{l!\,\Gamma(bh+b+1)}(e^{\frac{-1}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)})^{bh+b+l-1}=(1-e^{\frac{-1}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)})^{-bh-b-1} \qquad (10)$$

وبالتالي يمكن كتابة دالة الكثافة الإحتمالية لتوزيع(WA)كالتالي:

$$f(x,\lambda,\beta,b)=\lambda b\frac{1}{x^{2}}e^{\frac{-1}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)+\frac{\beta}{x}}\sum_{h,l=0}^{\infty}(-1)^{h}\frac{\lambda^{h}}{h!\,l!}\frac{\Gamma(bh+b+l+1)}{l!\,\Gamma(bh+b+1)}(e^{\frac{-1}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)})^{bh+b+l-1}$$

ويمكن التعبير عن دالة الكثافة الإحتمالية لتوزيع(WA)علي الصورة الآتية:

$$f(x,\lambda,\beta,b) = b\sum_{h,l=0}^{\infty}(-1)^h \frac{\lambda^{1+h}}{h!\,l!}\frac{\Gamma(bh+b+l+1)}{l!\;\Gamma(bh+b+1)}\frac{1}{x^2}e^{\frac{-1}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)+\frac{\beta}{x}}\left(e^{\frac{-1}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}\right)^{bh+b+l-1}$$

ويمكن إعتبار الآتي:

$$c_{h,l} = b(-1)^h \frac{\lambda^{1+h}}{h!\,l!}\frac{\Gamma(bh+b+l+i)}{\Gamma(bh+b+1)(bh+b+l)}$$

$$w_{bh+b+l}(x) = (bh+b+l)g(x,\beta)(G(x,\beta))^{bh+b+l-1}$$

$$\mathrm{G(x)=G(x,}\,\beta) = e^{\frac{-1}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}$$

$$g(x) = g(x,\beta) = \frac{1}{x^2}e^{\frac{-1}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)+\frac{\beta}{x}}$$

حيث نصل إلي دالة الكثافة الإحتمالية لتوزيع (WA)علي الشكل الآتي:

$$f(x,\lambda,\beta) = \sum_{h,l=0}^{\infty} c_{h,l}\, w_{bh+b+l}\,(x) \quad (11)$$

وتعبر $w_{bh+b+l}$عن دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع A وبالتالي يمكن الحصول علي الخصائص الإحصائية لتوزيع (WA)من خلال خصائص توزيعA عن طريق استبدال(x) G و$g(x)$وهما cdf,pdf للنموذج الأساسي

## (٤) بعض الخصائص الإحصائية لتوزيع (WA)

(٤-١) الإحصاءات الترتيبية لتوزيع **(WA)**

نحصل على دالة الكثافة الإحتمالية للإحصاء الترتيبي من الرتبة (r) $1 \le r \le n$للمتغيرات العشوائية المستقلة التي تتبع توزيع (WA)علي الصورة الآتية:

$$\boldsymbol{g_{i:n}(x) = \frac{n!}{(i-1)!\,(n-1)!}\;\lambda b\frac{1}{x^2}e^{\frac{\beta}{X}}\left(\frac{(W)^b}{(1-W)^{b+1}}\right)e^{-\lambda\left(\frac{W}{1-W}\right)^b}}$$

$$\sum_{r=0}^{n-i}(-1)^r\binom{n-i}{r}\left(1-e^{-\lambda\left(\frac{W}{1-W}\right)^b}\right)^{i+r-1}$$

حيث

$$\mathbf{W} = \boldsymbol{e}^{\frac{-1}{B}(e^{\frac{B}{x}-1})}$$

(٤-٢) دالة الكوانتيل **Quantile function**

يمكننا الحصول علي دالة الكوانتيل لمتغير عشوائي X الذي يتبع توزيع (WA)من خلال إيجاد معكوس الدالة (٧) وتكون الدالة علي الشكل الآتي:

$$\boldsymbol{X_u} = \frac{\boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{Ln}\left(\boldsymbol{\beta ln}\left(\mathbf{1}+\left(\frac{-\mathbf{ln}(\mathbf{1}-\boldsymbol{u})}{\boldsymbol{\lambda}}\right)^{\frac{-\mathbf{1}}{\boldsymbol{b}}}\right)+\mathbf{1}\right)}$$

(٤-٣) العزوم

يمكن إيجاد العزوم لتوزيع WA من خلال عزوم توزيع Aبفرض أن X متغير عشوائي يتبع توزيع A بمعلمة B حيث أن العزم من الدرجة r على الصورة الآتية: -

$$\boldsymbol{M^{/}_{r}} = \boldsymbol{E(x^{r})} = \sum_{\boldsymbol{h,l=0}}^{\infty} \boldsymbol{Z_{h,l}} \int_{\mathbf{0}}^{\infty} \boldsymbol{X^{r} W_{bh+b+l}(x)dx}$$

$$M^{/}_{r} = \sum_{h,l=0}^{\infty} \sum_{i,m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{i} \frac{(-1)^{i+1}(1)^{i+1}(1+i)^{m} B^{r-i-1} l^{r-m-1}}{l!\, m!\, (i-l)!} m - r + 1\, z_{h,l}$$

## (٥) تقدير معلمات توزيع (WA)

(٥-١) تقدير معالم توزيع **(WA)** باستخدام طريقة المربعات الصغري العادية **(OLSE)**

بفرض أن F(X) دالة التوزيع للمتغيرات العشوائية التي تتبع توزيع (WA) فإنه يتم الحصول علي تقدير المربعات الصغري(OLSE) من خلال تدنية المعادلة الآتية:

$$S(\lambda,\beta,b) = \sum_{i=1}^{n} \left[F\langle x_{i:n}|\lambda,\beta,b\rangle - \frac{i}{n+1}\right]^{2}$$

يمكن إيجاد مقدرات المربعات الصغرى $\widehat{\boldsymbol{\lambda}}_{\boldsymbol{OLSE}}$ ، $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{OLSE}}$، $\widehat{\boldsymbol{b}}_{\boldsymbol{OLSE}}$ للمعالم $(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{b})$ من خلال حل المعادلات غير الخطية الآتية:

$$\frac{ds(\lambda,\beta,b)}{d\lambda} = \sum_{i=1}^{n} \left[F\langle x_{i:n}|\lambda,\beta,b\rangle - \frac{i}{n+1}\right]^{2} \Delta_{1}\langle x_{i:n}|\lambda,\beta,b\rangle = 0$$

$$\frac{ds(\lambda,B,b)}{d\beta}=\sum_{i=1}^{n}\left[F\langle x_{i:\,n}|\lambda,\beta,b\rangle-\frac{i}{n+1}\right]^{2}\Delta_2\langle x_{i:\,n}|\lambda,\beta,b\rangle=0$$

$$\frac{\mathrm{ds}(\lambda,\mathrm{B},\mathrm{b})}{\mathrm{db}}=\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\left[\mathrm{F}\langle \mathrm{x}_{\mathrm{i:\,n}}|\lambda,\beta,\mathrm{b}\rangle-\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{n}+1}\right]^{2}\Delta_3\langle \mathrm{x}_{\mathrm{i:\,n}}|\lambda,\beta,\mathrm{b}\rangle=0$$

$$\Delta_1\langle x_{i:\,n}|\lambda,\beta,b\rangle=\left(\frac{e^{-\frac{1}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}}{1-e^{-\frac{1}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}}\right)^{b}e^{-\lambda\left(\frac{e^{-\frac{1}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}}{1-e^{-\frac{1}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}}\right)^{b}}$$

(١٢)

$$\begin{aligned}\Delta_2\langle x_{i:\,n}|\lambda,\beta,b\rangle&=\left[\lambda\frac{\left[\frac{b}{\beta^2}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)-\frac{b}{\beta x}e^{\frac{\beta}{xi}}\right]e^{\frac{-b}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}}{\left(1-e^{-\frac{1}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}\right)^{b}}\right.\\&+b\lambda\left(\frac{1}{\beta^2}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)\right.\\&\left.\left.-\frac{1}{\beta x}e^{\frac{\beta}{xi}}\right)e^{-\frac{(b+1)}{\beta}\left(e^{e^{\frac{\beta}{x}}}-1\right)}\left(1-e^{\frac{-1}{B}(e^{\frac{B}{X}}-1)}\right)^{-b-1}\right]\end{aligned}$$

(١٣)

$$\Delta_3\langle x_{i:n}|\lambda,\beta,b\rangle = \left[ -\frac{\lambda}{\beta}\frac{\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)e^{\frac{-b\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}{\beta}}}{\left(1-e^{-\frac{1}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}\right)^{b}} - \lambda\frac{Ln\left(1-e^{-\frac{1}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}\right)e^{\frac{-b\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}{\beta}}}{\left(1-e^{\frac{-1}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}\right)^{b}} \right] e^{-\lambda\left(\frac{\left(e^{-\frac{1}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}\right)}{1-e^{-\frac{1}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}}\right)^{b}} \quad (١٤)$$

(٢-٥) تقدير معالم توزيع **(WA)**باستخدام طريقة المربعات الصغري المرجحة **(WLSE)**

بفرض أن F(X)دالة التوزيع للمتغيرات العشوائية التي تتبع توزيع(WA)فإنه يتم الحصول علي تقدير المربعات الصغري المرجحة (WLSE) من خلال تدنية المعادلة الآتية:

$$W(\lambda,\beta,b)=\sum_{i=1}^{n}\frac{(n+1)^2(n+2)}{i(n-i-1)}\left[F\langle x_{i:n}|\lambda,\beta,b\rangle-\frac{i}{n+1}\right]^2$$

ويمكن إيجاد مقدرات المربعات الصغرى ( $\hat{\lambda}_{\mathrm{WLSE}}$ ، $\hat{\beta}_{WLSE}$ ، $\hat{b}_{WLSE}$ ) للمعالم $(\lambda,\beta,b)$ من خلال حل المعادلات غير الخطية الآتية:

$$\frac{dw(\lambda,\beta,b)}{d\lambda}=\sum_{i=1}^{n}\left[F\langle x_{i:n}|\lambda,\beta,b\rangle-\frac{i}{n+1}\right]^2\Delta_1\langle x_{i:n}|\lambda,\beta,b\rangle=0$$

$$\frac{dw(\lambda,B,b)}{d\beta}=\sum_{i=1}^{n}\left[F\langle x_{i:n}|\lambda,\beta,b\rangle-\frac{i}{n+1}\right]^2\Delta_2\langle x_{i:n}|\lambda,\beta,b\rangle=0$$

$$\frac{dw(\lambda,B,b)}{db}=\sum_{i=1}^{n}\left[F\langle x_{i:n}|\lambda,\beta,b\rangle-\frac{i}{n+1}\right]^2\Delta_3\langle x_{i:n}|\lambda,\beta,b\rangle=0$$

حيث $\Delta_3\langle x_{i:n}|,\beta,b\rangle$ , $\Delta_2\langle x_{i:n}|\lambda,\beta,b\rangle$ , $\Delta_1\langle x_{i:n}|\lambda,\beta,b\rangle$

تم إشتقاقهم في المعادلات (12)، (13)، (14) ويمكن إستخدام الحزمة الرياضية MathCAD (15) في حل هذه المعادلات عددياً.

(٥-٣)تقدير معالم توزيع **(WA)** باستخدام طريقة الإمكان الأعظم **(MLE)**

بفرض أن $X_1, X_2, \ldots X_3$ متغيرات عشوائية ومتماثلة في التوزيع وتتبع توزيع (WA)فإن دالة الإمكان اللوغاريتمية لدالة الكثافة الإحتمالية (٧)تكون علي الشكل الآتي:

$$M(\phi) = nLn(\lambda) + nLn(b) - 2\sum_{i=1}^{n} Ln(x_i) + \beta\sum_{i=1}^{n} Ln\left(\frac{1}{x_i}\right) - \frac{b}{\beta}\sum_{i=1}^{n}\left(e^{\frac{\beta}{xi}} - 1\right) - (b + 1)\sum_{i=1}^{n} Ln\left(1 - e^{-\frac{1}{\beta}(e^{\frac{\beta}{xi}} - 1)}\right) - \lambda\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\left(e^{-\frac{1}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{xi}} - 1\right)}\right)}{1 - e^{-\frac{1}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{xi}} - 1\right)}}\right)^{b} \quad (15)$$

**نقوم بإيجاد التفاضل الجزئي الأول لدالة $M(\phi)$ لكل معلمة من المعلمات ومساواه الناتج بالصفر للحصول على مقدرات الإمكان الأعظم.**

ويأخذ التفاضل الجزئي للمعادلة (١٥) الشكل الآتي:

$$\frac{dM}{d\lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\left(e^{-\frac{1}{\beta}(e^{\frac{\beta}{xi}} - 1)}\right)}{1 - e^{-\frac{1}{\beta}(e^{\frac{\beta}{xi}} - 1)}}\right)^{b}$$

$$\frac{dM}{d\beta} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{xi} - \frac{b}{\beta}\sum_{i=1}^{n}\frac{e^{\frac{\beta}{xi}}}{xi} + \frac{b}{\beta^2}\sum_{i=1}^{n}(e^{\frac{\beta}{xi}} - 1) + (b + 1)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(\frac{1}{\beta^2}\left(e^{\frac{\beta}{xi}} - 1\right) - \frac{1}{\beta xi}e^{\frac{\beta}{xi}}\right)e^{-\frac{1}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{xi}} - 1\right)}}{\left(1 - e^{-\frac{1}{\beta}(e^{\frac{\beta}{xi}} - 1)}\right)}$$

$$-\lambda\sum_{i=2}^{n}\frac{\left[\frac{b}{\beta^2}\left(e^{\frac{\beta}{xi}}-1\right)-\frac{1}{\beta xi}e^{\frac{\beta}{xi}}\right]e^{-\frac{b}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{xi}}-1\right)}}{\left(1-e^{-\frac{1}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{xi}}-1\right)}\right)^{b}}$$

$$-b\lambda\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\beta^2}\left(e^{\frac{\beta}{xi}}-1\right)-\frac{1}{\beta xi}e^{\frac{\beta}{xi}}\right)e^{-\frac{b+1}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{xi}}-1\right)}\left(1-e^{-\frac{1}{\beta}(e^{\frac{\beta}{xi}}-1)}\right)^{-b-1}$$

$$\frac{dM}{db}=\frac{n}{b}-\frac{1}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{xi}}-1\right)$$

$$-\sum_{i=1}^{n}Ln\left(1-e^{-\frac{1}{\beta}(e^{\frac{\beta}{xi}}-1)}\right)+\frac{\lambda}{\beta}\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(e^{\frac{\beta}{xi}}-1\right)e^{\frac{-b(e^{\frac{\beta}{xi}}-1)}{\beta}}}{\left(1-e^{-\frac{1}{\beta}(e^{\frac{\beta}{xi}}-1)}\right)^{b}}$$

$$+\lambda\sum_{i=1}^{n}\frac{Ln\left(1-e^{-\frac{1}{\beta}(e^{\frac{\beta}{xi}}-1)}\right)e^{\frac{-b(e^{\frac{\beta}{xi}}-1)}{\beta}}}{\left(1-e^{-\frac{1}{\beta}(e^{\frac{\beta}{xi}}-1)}\right)^{b}}$$

من خلال حل المعادلات غير الخطية التالية نحصل على تقدرات الإمكان الأعظم

$$\left(\frac{dM}{d\lambda}=0\,,\frac{dM}{d\beta}=0\,,\frac{dM}{db}=0\right)$$

(٤-٥) تقدير معالم توزيع **(WA)** باستخدام طريقة كرامر-فون ميزس **(CVME)**

يمكن الحصول علي المقدرات للمعالم من خلال تدنية المعادلة الآتية:

$$C(\lambda,\beta,b)=\frac{1}{12n}+\sum_{i=1}^{n}\left[F\langle x_{i:n}|\lambda,\beta,b\rangle-\frac{2i-1}{2n}\right]^2$$

وبحل المعادلة غير الخطية الآتية يتم الحصول علي مقدرات كرامر-فون ميزس(CVME)

$$\frac{dC(\lambda,\beta,b)}{d\lambda}=\sum_{i=1}^{n}\left[F\langle x_{i:n}|\lambda,\beta,b\rangle-\frac{2i-1}{2n}\right]^2\Delta_1\langle x_{i:n}|\lambda,\beta,b\rangle=0$$

$$\frac{dC(\lambda,B,b)}{d\beta}=\sum_{i=1}^{n}\left[F\langle x_{i:n}|\lambda,\beta,b\rangle-\frac{2i-1}{2n}\right]^2\Delta_2\langle x_{i:n}|\lambda,\beta,b\rangle=0$$

$$\frac{dC(\lambda,B,b)}{db}=\sum_{i=1}^{n}\left[F\langle x_{i:n}|\lambda,\beta,b\rangle-\frac{2i-1}{2n}\right]^2\Delta_3\langle x_{i:n}|\lambda,\beta,b\rangle=0$$

حيث $\Delta_3\langle x_{i:n}|,\beta,b\rangle\,,\Delta_2\langle x_{i:n}|\lambda,\beta,b\rangle\,,\Delta_1\langle x_{i:n}|\lambda,\beta,b\rangle$

تم إشتقاقهم في المعادلات (12)، (13)، (14) ويمكن إستخدام الحزمة الرياضية MathCAD (15) في حل هذه المعادلات عددياً.

## (٦) دراسة محاكاة توزيع (WA)

في هذا الجزء تم إستخدام أربعة طرق للتقدير وهى المربعات الصغرى العادية OLSE وطريقة المربعات الصغرى المرجحة WLSE وطريقة الإمكان الأعظم MLE وطريقة كرامر – فون ميزس CVME وتم أخذ بعض معايير الجودة مثل متوسط التقديرات Mean Estimation (ME) ومقدر التحيز Bias وجذر متوسط مربعات الخطأ Root Mean Square (RMSE) والخطأ المعياري Standard Error (S.E) لكل تقدير بإستخدام الحزمة الإحصائية MathCAD (15)وكل عينة تم تكرارها 1000 مره عند حالات متعددة كما يلي:

I: $\lambda=0.2\,,\beta=1.5\,,b=1.2$

II: $\lambda=0.3\,,\beta=1.2\,,b=4$

III: $\lambda=0.5\,,\beta=1.2\,,b=2$

بمناقشة نتائج المحاكاة في الحالات الثلاثة لتوزيع (WA)توصلت الدراسة للتالي:

١) أوضحت طرق التقدير CVME,MLE,WLSE,OLSE أن القيم التقديرية للمعالم تقترب من القيم الإفتراضية.
٢) كلما زاد حجم العية زادت جودة التقدير بالإعتماد علي طرق التقدير المختلفة من خلال تناقص قيم معايير جودة النموذج Bias,RMSE,S.E مما يتناسب ويتفق مع النظرية الإحصائية.
٣) تبين أفضلية طريقة المربعات الصغري المرجحة (WLSE) عند المعلمة λ في حين تبين أفضلية طريقة الإمكان الأعظم (MLE) عند المعلمتين β ,b بالإعتماد علي أحجام عينات مختلفة في ظل وجود المجموعات الثلاثة.

## (٧) التطبيق العملي لتوزيع (WA)

يتضمن الفصل مجموعتين من البيانات تم استخدامهم لإثبات مرونة وكفاءة التوزيع الجديد(WA) .

وفي هذا الجانب تم إستخدام طريقة الإمكان الأعظم لإجراء التقدير لمعالم توزيع (WA) لكل مجموعة من البيانات بالاعتماد على برنامج MathCAD(15)وتم الاعتماد على هذه التقديرات في التأكد من ملائمة وجودة البيانات للتوزيع الجديد (WA) باستخدام اختبار كولومجروف – سميرنوف ومعرفة قيمة ( P-Value) وكذلك ( $A^*, W^*, AIC, BIC, HQIC, CAIC$)لمقارنة التوزيع الجديد لبعض التوزيعات الآخرى وهي: Inverted Lomax (ILX) ,Inverse Gompertz (IG),Kumaraswamy Inverse

Gomfertz (KIG), Weibull Inverse Gomportz (WIG), Weibull Burr Type x (W-BTX)

وهذه التوزيعات تأخذ دوال الكثافة الإحتمالية على الشكل الآتى:

$$\text{IG: } f(x,\alpha,\beta)=\frac{\propto}{x^2}e^{\frac{-\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}-1}\right)+\frac{\beta}{x}}$$

$$\text{ILX: } f(x,\alpha,\beta)=\frac{\propto\beta}{x^2}(1+\frac{\beta}{x})^{-(1+\alpha)}$$

$$\text{KIG: } f(x,\alpha,\theta,\beta)=\frac{\propto\theta\beta}{x^{(\alpha+1)}}\text{Exp}(-\theta(e^{\frac{\beta}{x^\alpha}}-1)+\frac{\beta}{x^\alpha})$$

$$\text{W-BTX: } f(x,\alpha,\beta,\lambda,\theta)=2\alpha\beta\theta\lambda^2e^{-(\lambda x)^2}\frac{(1-e^{-(\lambda x)^2})^{\theta\beta-1}}{(1-(1-e^{-(\lambda x)^2})^\theta)^{\beta+1}}e^{-\alpha(\frac{(1-e^{-(\lambda x)^2})^\theta}{1-(1-e^{-(\lambda x)^2})^\theta})^\beta}$$

$$\text{WIG: } f(x,\lambda,\alpha,\beta,b)=\lambda b\frac{\alpha}{x^2}e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)+\frac{\beta}{x}}\left(\frac{\left(e^{\frac{-\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}\right)^{b-1}}{\left(1-e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}\right)^{b+1}}\right)e^{-\lambda\left(\frac{e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}}{1-e^{-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\frac{\beta}{x}}-1\right)}}\right)^{b}}$$

كما تم تقدير معلمات التوزيع الجديد (WA)باستخدام طريقة المربعات الصغري العادية(OLSE)وطريقة المربعات الصغري المرجحة(WLSE)وطريقة كرامر-فون ميزس (CVME)باستخدام برنامج MathCAD(15) وذلك بالتطبيق علي المجموعة الأولي من البيانات ثم تم إستخدام تلك التقديرات في التأكد من جودة توفيق التوزيع الجديد(WA)بإستخدام بعض مقاييس جودة التوفيق المستخدمة في معظم الدراسات المتعلقة بموضوع الدراسة وهي $A^*, W^*, P-Value$ )ومقارنة نتائج طرق التقدير المختلفة (OLSE,WLSE,MLE,CVME)لإيجاد أفضل طريقة لتقدير معالم التوزيع الجديد(WA).

**المجموعة الأولي من البيانات**

تتضمن هذه المجموعة ٣١ مشاهدة لبيانات قوة زجاج نافذة الطائرة والتي نشرت بواسطة

R-ALshenawy (2020)

جدول (١) يعرض تقديرات الإمكان الأعظم لمعلمات التوزيع الجديد (WA) وكذلك تقديرات الإمكان الأعظم للتوزيعات المقارنة الخاصة بالمجموعة الاولي من البيانات

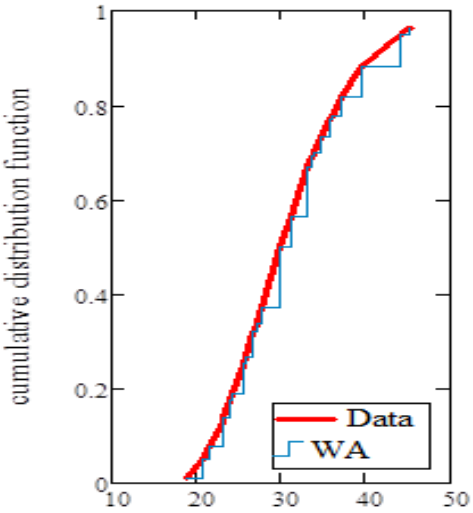
| التوزيع | تقديرات الإمكان الأعظم | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | λ | β | b | α | θ |
| WA | 0.25614 | 108.46986 | 1.08907 | - | - |
| IG | - | 119.73895 | - | 1.25157 | - |
| ILX | - | 0.87554 | - | 33.41994 | - |
| KIG | 4.16989 | 62.38263 | - | 15.32863 | - |
| W-BTX | 0.02774 | 1.50246 | - | 0.68942 | 1.128 |
| WIG | .00001 | 0.01902 | 2.393 | 0.2293 | - |

جدول (٢) يعرض النتائج المتعلقة بمقاييس جودة التوفيق التوزيع (WA) والتوزيعات المقارنة للمجموعة الأولى من البيانات

| التوزيع | مقاييس جودة التوفيق | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | -2L | AIC | BIC | HQIC | CAIC | K.S | P-value | A* | W* |
| WA | 206.997 | 212.997 | 217.299 | 214.4 | 213.886 | 0.119 | 0.77 | 0.335 | 0.062 |
| IG | 215.768 | 219.768 | 222.636 | 220.702 | 220.196 | 0.139 | 0.586 | 0.778 | 0.118 |
| ILX | 275.394 | 279.394 | 282.262 | 280.329 | 279.822 | 0.472 | 0.000002 | 0.392 | 0.074 |
| KIG | 209.925 | 215.925 | 220.227 | 217.327 | 216.814 | 0.16 | 0.405 | 0.47 | 0.081 |
| W-BTX | 213.539 | 221.539 | 227.275 | 223.409 | 223.077 | 0.169 | 0.341 | 0.869 | 0.124 |
| WIG | 227.905 | 235.905 | 241.641 | 237.775 | 237.443 | 0.269 | 0.023 | 0.487 | 0.084 |

يتضح من الجدول رقم (٢) أن توزيع (WA) أفضل فى توفيق البيانات من التوزيعات المقارنة ILX, IG, WIG , W-BTX, KIG لان له اعلي قيمة عند (p-Value)واقل قيمة للإحصاءات ( ,W*, A*,k.s)وتبين أن أن توزيع (WA)له اقل قيم لمقاييس: (BIC ,AIC, CAIC, HQIC)مقارنة بالتوزيعات المقارنة مما يثبت كفاءة التوزيع الجديد.

ومن خلال رسم دالة التوزيع التجميعية للتعميم الجديد (WA)لمجموعة البيانات الأولي يتضح أن التعميم الجديد (WA)قادر علي توفيق البيانات بشكل جيد مقارنة بالتوزيعات الأخري ويظهر ذلك في الشكل (٤)




**شكل(٤): توفيق دالة Cdf لتوزيع(WA)للمجموعة الأولي من البيانات**

**المجموعة الثانية من البيانات**

وهي عبارة عن القوة المقاسة بوحدةGPA لألياف الكربون المفردة بأطوال قياس ١٠ مم

Refah Alotaibi et.al.(2022)

جدول(٣) يعرض تقديرات الإمكان الأعظم لمعالم توزيع (WA) والتوزيعات المقارنة الخاصة بالمجموعة الثانية من البيانات

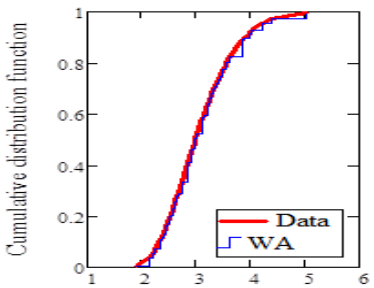
| التوزيع | تقديرات الإمكان الأعظم | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | λ | β | b | α | θ |
| WA | 2.04861 | 6.38904 | 1.36373 | - | - |
| IG | - | 14.2108 | - | 0.07079 | - |
| ILX | - | 0.32405 | - | 9.11455 | |
| KIG | 6.01 | 6.45453 | - | 1.78626 | |
| W-BTX | 0.34476 | 0.70323 | - | 3.5135 | 6.021 |
| WIG | 0.00913 | 0.11147 | 4.333 | 0.94716 | - |

جدول (٤) يعرض النتائج المتعلقة بمقاييس جودة التوفيق لتوزيع (WA) والتوزيعات المقارنة للمجموعة الثانية من البيانات

| مقاييس جودة التوفيق | | | | | | | | | التوزيع |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| W* | A* | P-value | K.S | CAIC | HQIC | BIC | AIC | -2L | |
| 0.049 | 0.271 | 0.869 | 0.075 | 118.398 | 120.52 | 124.421 | 117.991 | 111.991 | WA |
| 0.195 | 1.176 | 0.41 | 0.112 | 132.146 | 133.632 | 136.232 | 131.946 | 127.946 | IG |
| 0.06 | 0.321 | 0.0000000000045 | 0.461 | 277.48 | 278.965 | 281.566 | 277.28 | 273.28 | ILX |
| 0.085 | 0.451 | 0.554 | 0.1 | 120.774 | 122.896 | 126.796 | 120.367 | 114.367 | KIG |
| 0.081 | 0.573 | 0.854 | 0.077 | 127.662 | 130.344 | 135.544 | 120.972 | 118.972 | W-BTX |
| 0.113 | 0.789 | 0.805 | 0.081 | 130.668 | 133.35 | 138.551 | 129.978 | 121.978 | WIG |

يتضح من الجدول (٤) أن توزيع (WA) أفضل فى توفيق البيانات من التوزيعات المقارنة ILX, IG, WIG , W-BTX, KIG لان له اعلي قيمة عند (P-Value)واقل قيمة للإحصاءات( W*, A*,k.s كما أن توزيع (WA)له اقل قيم لمقاييس: CAIC, HQIC (BIC ,AIC),مقارنة بالتوزيعات المقارنة مما يثبت كفاءة التوزيع الجديد.

ومن خلال رسم دالة التوزيع التجميعية للتعميم الجديد () لمجموعة البيانات الثانية يتضح أن التعميم الجديد (WA) قادر علي توفيق البيانات بشكل جيد مقارنة بالتوزيعات الأخري ويظهر ذلك في الشكل (٥)




**شكل(٥): توفيق دالة Cdf لتوزيع (WA)للمجموعة الثانية من البيانات**

## النتائج

في هذه الدراسة تم الحصول علي تعميم جديد لتوزيع (A)بإستخدام العائلة اللوغاريتمية Weibull Generated Family(W-G) يسمي (WA) ودراسة بعض الخصائص للتعميم الجديد العزوم والإحصاءات الترتيبية وغيرها وتقدير معالم التعميم الجديد (WA)بإستخدام أربعة طرق تقدير مختلفة وهي(طريقة المربعات الصغري العادية (OLSE)وطريقة المربعات الصغري المرجحة (WLSE)وطريقة الإمكان الأعظم(MLE)وطريقة كرامر-فون ميزس(CVME)و قدمت دراسة محاكاة مونت كارلو للتعميم الجديد (WA)بالإعتماد علي الحزمة الرياضية MathCAD(15) وتم الحصول علي التقديرات بإستخدام طرق التقديرالأربعة لمقارنة أداء طرق التقدير المختلفة بناء علي بعض معايير جودة التوفيق؛ حيث تم إثبات أفضلية طريقة الإمكان الأعظم عن باقي طرق التقدير المستخدمة و تم إثبات كفاءة التعميم الجديد(WA)من خلال التطبيق علي مجموعتين مختلفتين من البيانات بالإعتماد علي بعض مقاييس جودة التوفيق حيث قامت الدراسة بمقارنة التعميم الجديد بكل من التوزيعات (IG,KIG,ILX,W-BTX,WIG )وتم التوصل إلي أن التعميم الجديد أفضل في توفيق مجموعتي البيانات و أثبتت الدراسة أن مقدر الإمكان الأعظم هو أفضل مقدر لتقدير معالم توزيع (WA)وفقاً لمقاييس جودة التوفيق المستخدمة حيث أن مقدر الإمكان الأعظم له أقل قيمة لمقاييس جودة التوفيق وأعلي قيمة لمقياسP-Value من خلال التطبيق علي المجموعة الأولي من البيانات.

## المراجع

1) ALshenawy,R.(2020).A new one parameter distribution: Properties and estimation with applications to complete and type II Censored data.Journal of Taibah University for Science,14(1),11-18.
2) Biswabrata,P.,Gijo,E.(2013).”Parameter Estimation of Lognormal Distribution under Progressive type-I Interval Censoring”,Technical Report No.SQCOR-2013-02.
3) Bourguignon,M.,Silva,R.B.,&Cordeiro,G.M.(2014).The Weibull-G family of probability distributions.Journal of data Science,12(1),53-68.
4) Dey,S.,Moala,F.A.,&Kumar,D.(2018).Statistical Properties and different methods of estimation of Gompertz distribution with application.Journal of Statistics and Management Systems,21(5),839-876
5) El-Morshedy, M.,El-Faheem, A., A.,&El-Dawoody, M.,(2020).Kumaraswamy inverse Gompertz distribution: Properties and engineering applications to complete ,type-II right censored and upper record data.Plos one,15(12),e024197
6) Khfagy,H.(2014).Bayesian estimation method for life time model under accelerated life tests.Master thesis.Institute of Statistical Research and Studies.
7) Tahir, M.H.,Cordeiro,G.M.,Mansoor,M.,&Zubair,M.(2015).The Weibull-Lomax distribution: Properties and applications.Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics,44(2),461-480.

٨) حلا سلمان فرحان، (٢٠٠٧)"مقارنة طرائق تقدير دالة البقاء لتوزيع لوماكس بإستخدام عينات مقيدة من النوع الثاني "، **رسالة ماجستير** -كلية التجارة جامعة بغداد، العراق.
٩) مريم مصطفي دنيا، (٢٠٢٤)"نمذجة بيانات البقاء باستخدام توزيعات عائلة وايبل المعممة - دراسة تطبيقية" **رسالة ماجستير**، كلية التجارة، جامعة دمياط

## الملاحق

**نتائج المحاكاة للحالات الثلاثة:**

جدول (٥)يمثل معايير الجودة ومتوسط التقديرات لمعالم توزيع (WA)عند أحجام العينات المتنوعة والقيم للمعالم (I)

| $(\mathbf{I}: \boldsymbol{\lambda = 0.2}, \boldsymbol{\beta = 1.5}, \boldsymbol{b = 1.2})$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **n** | **Methods** | | **ME** | **Bias** | **RMSE** | **S.E** |
| 50 | OLSE | λ | 0.229 | 0.029 | 0.156 | 0.003057 |
| | | β | 1.469 | -0.031 | 1.604 | 0.032 |
| | | B | 1.233 | 0.033 | 0.349 | 0.006945 |
| | WLSE | λ | 0.221 | 0.021 | 0.132 | 0.002613 |
| | | β | 1.458 | -0.042 | 1.312 | 0.026 |
| | | b | 1.231 | 0.031 | 0.302 | 0.006004 |
| | MLE | λ | 0.229 | 0.029 | 0.105 | 0.002022 |
| | | β | 1.77 | 0.27 | 0.928 | 0.018 |
| | | b | 1.201 | 0.0009863 | 0.222 | 0.004435 |
| | CVME | λ | 0.233 | 0.033 | 0.16 | 0.003126 |
| | | β | 1.605 | 0.105 | 1.616 | 0.032 |
| | | b | 1.245 | 0.045 | 0.351 | 0.00697 |
| 100 | OLSE | λ | 0.22 | 0.02 | 0.104 | 0.001018 |
| | | β | 1.538 | 0.038 | 1.118 | 0.011 |
| | | b | 1.206 | 0.005767 | 0.232 | 0.002324 |
| | WLSE | λ | 0.217 | 0.017 | 0.086 | 0.0008391 |
| | | β | 1.565 | 0.065 | 0.861 | 0.008584 |
| | | b | 1.198 | -0.001664 | 0.187 | 0.001874 |
| | MLE | λ | 0.221 | 0.021 | 0.071 | 0.0006802 |
| | | β | 1.695 | 0.195 | 0.638 | 0.006075 |
| | | b | 1.186 | -0.014 | 0.144 | 0.001431 |
| | CVME | λ | 0.222 | 0.022 | 0.106 | 0.001034 |
| | | β | 1.599 | 0.099 | 1.137 | 0.011 |
| | | b | 1.214 | 0.014 | 0.238 | 0.002373 |
| 150 | OLSE | λ | 0.207 | 0.006578 | 0.08 | 0.0005321 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | β | 1.473 | -0.027 | 0.872 | 0.005809 |
| | | b | 1.219 | 0.019 | 0.187 | 0.001243 |
| | WLSE | λ | 0.204 | 0.004449 | 0.065 | 0.000433 |
| | | β | 1.493 | -0.007092 | 0.65 | 0.004334 |
| | | b | 1.215 | 0.015 | 0.149 | 0.0009894 |
| | MLE | λ | 0.208 | 0.008375 | 0.053 | 0.0003508 |
| | | β | 1.596 | 0.096 | 0.484 | 0.003165 |
| | | b | 1.205 | 0.005036 | 0.119 | 0.000791 |
| | CVME | λ | 0.207 | 0.0074 | 0.081 | 0.0005374 |
| | | β | 1.516 | 0.016 | 0.876 | 0.005836 |
| | | b | 1.224 | 0.024 | 0.19 | 0.001255 |
| 200 | OLSE | λ | 0.211 | 0.011 | 0.073 | 0.0003619 |
| | | β | 1.536 | 0.036 | 0.769 | 0.00384 |
| | | b | 1.2 | -0.0001392 | 0.164 | 0.0008189 |
| | WLSE | λ | 0.209 | 0.008698 | 0.057 | 0.000282 |
| | | β | 1.546 | 0.046 | 0.556 | 0.002772 |
| | | b | 1.197 | 0.003399 | 0.126 | 0.000631 |
| | MLE | λ | 0.209 | 0.009149 | 0.046 | 0.0002233 |
| | | β | 1.591 | 0.091 | 0.406 | 0.001977 |
| | | b | 1.194 | -0.006056 | 0.099 | 0.0004947 |
| | CVME | λ | 0.212 | 0.012 | 0.074 | 0.0003656 |
| | | β | 1.567 | 0.067 | 0.776 | 0.003866 |
| | | b | 1.203 | 0.003452 | 0.165 | 0.0008259 |

**المصدر: نتائج محاكاة مونت كارلو باستخدام برنامج الماسكاد**

جدول(٦) يمثل معايير الجودة ومتوسط التقديرات لمعالم توزيع (WA)عند أحجام العينات المتنوعة والقيم للمعالم (**II**)

| (II: $\lambda = 0.3, \beta = 1.2, b = 4$) | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **n** | **Methods** | | **ME** | **Bias** | **RMSE** | **S.E** |
| 50 | OLSE | λ | 0.497 | 0.197 | 0.777 | 0.015 |
| | | β | 1.148 | -0.052 | 1.068 | 0.021 |
| | | B | 4.171 | 0.171 | 1.186 | 0.023 |
| | WLSE | λ | 1.166 | 0.866 | 2.086 | 0.038 |
| | | β | 1.313 | 0.113 | 1.989 | 0.04 |
| | | b | 4.376 | 0.376 | 2.218 | 0.044 |
| | MLE | λ | 1.125 | 0.825 | 1.727 | 0.03 |
| | | β | 1.693 | 0.493 | 1.961 | 0.038 |
| | | b | 4.015 | 0.015 | 1.801 | 0.036 |
| | CVME | λ | 0.528 | 0.228 | 0.826 | 0.016 |
| | | β | 1.207 | 0.006585 | 1.04 | 0.021 |
| | | b | 4.229 | 0.229 | 1.213 | 0.024 |
| 100 | OLSE | λ | 0.49 | 0.19 | 0.67 | 0.00643 |
| | | β | 1.178 | -0.022 | 0.894 | 0.008942 |
| | | b | 4.109 | 0.109 | 0.986 | 0.009804 |
| | WLSE | λ | 0.99 | 0.69 | 1.595 | 0.014 |
| | | β | 1.363 | 0.163 | 1.551 | 0.015 |
| | | b | 4.137 | 0.137 | 1.723 | 0.017 |
| | MLE | λ | 1.038 | 0.738 | 1.454 | 0.013 |
| | | β | 1.862 | 0.662 | 1.944 | 0.018 |
| | | b | 3.71 | -0.29 | 1.628 | 0.016 |
| | CVME | λ | 0.487 | 0.187 | 0.672 | 0.00645 |
| | | β | 1.18 | -0.02 | 0.892 | 0.00892 |
| | | b | 4.171 | 0.171 | 1.017 | 0.01 |
| 150 | OLSE | λ | 0.417 | 0.117 | 0.547 | 0.00356 |
| | | β | 1.11 | -0.09 | 0.802 | 0.005313 |
| | | b | 4.196 | 0.196 | 0.931 | 0.006067 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | WLSE | λ | 0.706 | 0.406 | 1.092 | 0.00676 |
| | | β | 1.208 | 0.008096 | 1.253 | 0.008356 |
| | | b | 4.227 | 0.227 | 1.427 | 0.009394 |
| | MLE | λ | 0.961 | 0.661 | 1.371 | 0.008007 |
| | | β | 1.852 | 0.652 | 1.958 | 0.012 |
| | | b | 3.715 | -0.285 | 1.617 | 0.011 |
| | CVME | λ | 0.433 | 0.133 | 0.583 | 0.003786 |
| | | β | 1.149 | -0.051 | 0.795 | 0.005292 |
| | | b | 4.191 | 0.191 | 0.908 | 0.005917 |
| 200 | OLSE | λ | 0.426 | 0.126 | 0.514 | 0.002492 |
| | | β | 1.159 | -0.041 | 0.741 | 0.003702 |
| | | b | 4.113 | 0.113 | 0.846 | 0.00419 |
| | WLSE | λ | 0.681 | 0.381 | 0.953 | 0.004365 |
| | | β | 1.31 | 0.11 | 1.102 | 0.005483 |
| | | b | 4.046 | 0.046 | 1.218 | 0.006086 |
| | MLE | λ | 1.057 | 0.757 | 1.455 | 0.006211 |
| | | β | 2.04 | 0.84 | 2.004 | 0.009096 |
| | | b | 3.471 | -0.529 | 1.634 | 0.007729 |
| | CVME | λ | 0.453 | 0.153 | 0.57 | 0.002745 |
| | | β | 1.197 | -0.00303 | 0.765 | 0.003825 |
| | | b | 4.105 | 0.105 | 0.857 | 0.004253 |

**المصدر: نتائج محاكاة مونت كارلو باستخدام برنامج الماسكاد**

جدول(٧)يمثل معايير الجودة ومتوسط التقديرات لمعالم توزيع (WA)عند أحجام العينات المتنوعة والقيم للمعالم(**III**)

| (**III**: $\lambda = 0.5, \beta = 1.2, b = 2$) | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **n** | **Methods** | | **ME** | **Bias** | **RMSE** | **S.E** |
| 50 | OLSE | λ | 0.624 | 0.124 | 0.576 | 0.011 |
| | | β | 1.181 | -0.019 | 1.384 | 0.028 |
| | | b | 2.14 | 0.14 | 0.881 | 0.017 |
| | WLSE | λ | 0.592 | 0.092 | 0.538 | 0.011 |
| | | β | 1.101 | -0.099 | 1.29 | 0.026 |
| | | b | 2.189 | 0.189 | 0.897 | 0.018 |
| | MLE | λ | 0.655 | 0.155 | 0.482 | 0.009132 |
| | | β | 1.409 | 0.209 | 1.047 | 0.021 |
| | | b | 2.022 | 0.022 | 0.676 | 0.014 |
| | CVME | λ | 0.659 | 0.159 | 0.604 | 0.012 |
| | | β | 1.278 | 0.078 | 1.375 | 0.027 |
| | | b | 2.143 | 0.143 | 0.877 | 0.017 |
| 100 | OLSE | λ | 0.597 | 0.097 | 0.438 | 0.00427 |
| | | β | 1.226 | 0.026 | 1.039 | 0.01 |
| | | b | 2.057 | 0.057 | 0.637 | 0.006349 |
| | WLSE | λ | 0.581 | 0.081 | 0.384 | 0.003756 |
| | | β | 1.226 | 0.026 | 0.89 | 0.008901 |
| | | b | 2.045 | 0.045 | 0.564 | 0.005621 |
| | MLE | λ | 0.651 | 0.151 | 0.386 | 0.003555 |
| | | β | 1.466 | 0.266 | 0.839 | 0.007955 |
| | | b | 1.904 | -0.096 | 0.504 | 0.004945 |
| | CVME | λ | 0.619 | 0.119 | 0.46 | 0.004439 |
| | | β | 1.274 | 0.074 | 1.061 | 0.011 |
| | | b | 2.063 | 0.063 | 0.654 | 0.006509 |
| 150 | OLSE | λ | 0.542 | 0.042 | 0.346 | 0.002287 |
| | | β | 1.158 | -0.042 | 0.855 | 0.005692 |
| | | b | 2.086 | 0.086 | 0.538 | 0.003538 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | WLSE | λ | 0.527 | 0.027 | 0.29 | 0.001923 |
| | | β | 1.163 | -0.037 | 0.693 | 0.004612 |
| | | b | 2.07 | 0.07 | 0.441 | 0.002906 |
| | MLE | λ | 0.618 | 0.118 | 0.337 | 0.002101 |
| | | β | 1.418 | 0.218 | 0.746 | 0.004755 |
| | | b | 1.918 | -0.082 | 0.465 | 0.003048 |
| | CVME | λ | 0.553 | 0.053 | 0.352 | 0.00232 |
| | | β | 1.19 | 0.009736 | 0.85 | 0.005664 |
| | | b | 2.086 | 0.086 | 0.536 | 0.003525 |
| 200 | OLSE | λ | 0.556 | 0.056 | 0.318 | 0.001564 |
| | | β | 1.22 | 0.02 | 0.755 | 0.003775 |
| | | b | 2.028 | 0.028 | 0.465 | 0.002323 |
| | WLSE | λ | 0.544 | 0.044 | 0.255 | 0.001256 |
| | | β | 1.229 | 0.029 | 0.591 | 0.002953 |
| | | b | 2.011 | 0.011 | 0.367 | 0.001835 |
| | MLE | λ | 0.63 | 0.13 | 0.323 | 0.001558 |
| | | β | 1.448 | 0.248 | 0.7 | 0.003445 |
| | | b | 1.877 | -0.123 | 0.449 | 0.002273 |
| | CVME | λ | 0.565 | 0.065 | 0.324 | 0.001589 |
| | | β | 1.247 | 0.047 | 0.755 | 0.003766 |
| | | b | 2.027 | 0.027 | 0.462 | 0.002308 |

**المصدر: نتائج محاكاة مونت كارلو باستخدام برنامج الماسكاد**

# Modeling Censored Data Using Generalized Weibull Family Distribution (An Applied Study)

**Abstract :**

This study aims to obtain a new generalization of the A distribution to have the ability to reconcile many life phenomena with higher accuracy compared to other generalizations.

In this study. A new generalization of the Weibull A distribution was presented using the Weibull Generated Family (W-G) and it is called the Weibull A (WA)distribution. Some Statistical properties of the new generalization (WA) were also obtained, such as the quantile function, moments, and ordinal statistics. It has also been proved that the probability density function can be expressed as a linear function of the density functions of the A distribution. The distribution Parameters were also estimated using four different estimation methods, namely the ordinary-least squares method, the Weighted-least squares method, the maximum likelihood method, and the cramer-von mises method, and a simulation study was presented to evaluate the performance of the estimators.

Furthermore, the new generalization was applied to two different data sets. The first set is the strength of glass of the aircraft window data, and the second set is the strength measured in GPA for single carbon fibers with gauge lengths of 10 mm. The study proved the flexibility and efficiency of the new generalization compared to five other distributions, according to some statistical goodness-of-fit measures.

**Keywords :**

A distribution-Weibull Generated Family-Moments-Quantile Function-Order Statistics-Ordinary Least Square Method-Weighted Least Square Method-Maximum Likelihood Method-Crammer-Von mises Method.