



## تقدير معالم توزيع Frechet المعمم باستخدام بعض طرق التقدير المختلفة دراسة تطبيقية

بحث مُستل من رسالة ماجستير في الإحصاء

إعداد

أ.مئة الله حسين محمد الدريجي

د. محمد محمود نصر أبو ريا

معيدة بقسم الإحصاء التطبيقي والتأمين

أستاذ مساعد بقسم الإحصاء التطبيقي والتأمين

كلية التجارة، جامعة دمياط

كلية التجارة، جامعة دمياط

د. محمد إبراهيم محمد أحمد

أستاذ مساعد بقسم الإحصاء التطبيقي والتأمين

كلية التجارة، جامعة دمياط

المجلة العلمية للدراسات والبحوث المالية والتجارية

كلية التجارة – جامعة دمياط

المجلد الرابع - العدد الثاني – الجزء الرابع - يوليو ٢٠٢٣

التوثيق المقترح وفقاً لنظام APA:

الدريجي، منة الله حسين محمد؛ أبو ريا، محمد محمود نصر؛ أحمد، محمد إبراهيم محمد (٢٠٢٣).  
تقدير معالم توزيع Frechet المعمم باستخدام بعض طرق التقدير المختلفة: دراسة تطبيقية. المجلة  
العلمية للدراسات والبحوث المالية والتجارية، كلية التجارة، جامعة دمياط، ٤(٢)، ٤٨١-٥١٦.

رابط المجلة: <https://cfdj.journals.ekb.eg/>

## تقدير معالم توزيع Frechet المعمم باستخدام بعض طرق التقدير المختلفة دراسة تطبيقية

د. منة الله حسين الدريجي؛ د. محمد نصر أبو ريا؛ د. محمد إبراهيم محمد أحمد

ملخص:

تهدف الدراسة إلى الحصول على تعميم جديد لتوزيع فريشيه Fréchet distribution (Fr) ليكون له القدرة في توفير العديد من الظواهر الحياتية وبصورة خاصة بيانات الحياة Life time data بدقة أعلى مقارنة بتعميمات فريشيه الأخرى. تم في هذه الدراسة استخدام العائلة اللوجستية اللوغاريتمية الفردية Odd log-logistic family of distributions (OLL) لتقدير تعميم جديد لتوزيع فريشيه (Fr) يسمى توزيع Odd log-logistic Fréchet (OLLFr)، كما تم الحصول على بعض الخصائص الإحصائية للتعميم الجديد (OLLFr) مثل دالة الكوانتيل والعزوم التقليدية والعزوم غير الكاملة والإحصاءات الترتيبية وغيرها من الخصائص. كما تم إثبات أن دالة الكثافة للتعميم الجديد يمكن التعبير عنها كدالة خطية في دالة الكثافة لتوزيع فريشيه. وأيضاً تم تقدير معالم التوزيع من خلال استخدام أربعة طرق تقدير مختلفة وهي طريقة الإمكان الأعظم، طريقة المربعات الصغرى العادية، وطريقة المربعات الصغرى المرجحة وأخيراً طريقة كرامر-فون-ميزس، كما تم تقديم دراسة محاكاة لتقييم أداء المقدرات المختلفة وكانت نتائج دراسة المحاكاة تشير إلى أن طريقة الإمكان الأعظم هي الأفضل في التقدير مقارنة بباقي الطرق المستخدمة لأحجام العينات المختلفة.

ولقد تم دراسة مجموعتين من البيانات فالمجموعة الأولى من البيانات تتضمن فترة البقاء لعدد ٧٢ من خنازير غينيا بعد حقنهم بمصل معين وتم استخدام هذه البيانات من قبل العديد من الباحثين الذين قاموا بدراسة تعميمات أخرى لتوزيع فريشيه، أما المجموعة الثانية فتتضمن ٥٩ مشاهدة لبعض حالات الوفاة من جميع الفئات العمرية لمرضى الكبد المتوفين أثناء خضوعهم لبروتوكول العلاج لدى المركز التخصصي للقلب والجهاز الهضمي بدمياط والتي حدثت في الفترة من ٢٠١٩/١/١ إلى ٢٠٢٠/١/١ لتوضيح مدى مرونة التعميم الجديد مقارنة ببعض التعميمات الأخرى لتوزيع فريشيه حيث أكدت النتائج أفضلية التعميم الجديد وذلك من خلال استخدام بعض المقاييس الإحصائية مثل اختبار كولموجروف – سميرنوف (K.S) ومقياس Akaike Information Criterion (AIC) ومقياس Consistent Akaike Information Criterion (CAIC) ومقياس Bayesian Information Criterion (BIC) ومقياس Hannan-Quinn Information Criterion (HQIC).

### الكلمات المفتاحية:

توزيع فريشيه – العائلة اللوجستية اللوغاريتمية الفردية – العزوم التقليدية – العزوم غير الكاملة – الإحصاءات الترتيبية – طريقة الإمكان الأعظم – طريقة المربعات الصغرى العادية – طريقة المربعات الصغرى المرجحة – كرامر-فون-ميزس – بيانات البقاء.

(١) مقدمة:

تعتبر توزيعات نظرية القيمة القصوى Extreme Value theorem من التوزيعات الاحتمالية المستمرة المهمة وكثيرة الاستخدام في دراسة وتحليل الظواهر الطبيعية والاقتصادية وبدأ استخدامها عندما قام الباحث Gumbel بدراسة مسارات عودة الفيضانات وحساب احتمالاته. ويعد توزيع فريشيه Fréchet distribution (Fr) الذي قدمه Maurice Fréchet عام ١٩٢٤ أحدث توزيعات نظرية القيمة القصوى الثلاث (جامبل، فريشيه، واييل) ويطلق عليه اسم توزيع القيم القصوى من النوع الثاني، وقد صدر مؤخرًا كتاب يصف هذا التوزيع بواسطة Kotz and Nadarajah (٢٠٠٠) ويسرد أكثر من ٥٠ تطبيقًا له بدءًا من اختبارات الحياة Life testing وبيانات البقاء Lifetime data وحتى الزلازل والفيضانات والتقلبات الكبيرة في سعر الصرف وسباق الخيل وقوائم الانتظار وبعض البيانات الخاصة بالتأمين وأقساطه وغيرها. ولقد تم اقتراح العديد من الامتدادات لتوزيع فريشيه حيث قدم Nadarajah and Kotz (2004) توزيع بيتا فريشيه كتعميمًا لتوزيع فريشيه، وقدم Abd-Elfattah and Omima (2009) تقدير معلمات توزيع Exponentiated (generalized Fréchet)، واقترح Afify et al. (2015) نموذج بقاء ذي أربعة معالم كتعميم جديد لتوزيع فريشيه يسمى توزيع (Transmuted Marshall-Olkin Fréchet)، ونجد توزيع كوماراسوامي مارشال أولكن فريشيه المقدم بواسطة Afify et al. (2016a)، كما قدم (Afify et al. 2016b) توزيع واييل فريشيه، قدم Abd-Elfattah et al. (2016) توزيع فريشيه الأسى المعمم، كما اقترح Mead et al. (2017) توزيع بيتا فريشيه الأسى. وأيضًا قدم (2018) Mansour et al. توزيع كوماراسوامي فريشيه الأسى، واقترح Oguntunde, Pelumi E., et al. (2019) توزيع جومبرتز فريشيه، كما قدم المغاوري، (٢٠٢٠) تعميم جديد لتوزيع فريشيه يسمى توزيع كوماراسوامي كوماراسوامي واييل فريشيه، كما قدم Ramos, P. L., et al. (2020) دراسة تناولت هذه الدراسة مشكلة تقدير معلمات توزيع Fréchet بعدة طرق مختلفة، كذلك قدم (2020) Eghwerido, Joseph. T., et al. توزيع (alpha power Weibull Fréchet)، وقدم (2021) Mohamed, M, et al. امتداد جديد لتوزيع فريشيه ذو ثلاثة معالم يسمى توزيع (Xgamma Fréchet)، كما قدم (2021) Shafiq, Anum, et al., دراسة بعنوان: (A new modified Kies Fréchet distribution: Applications of mortality rate of Covid-19) بهدف تحديد التوزيع الإحصائي المناسب لفحص معدلات وفيات COVID-19، أيضًا، قدم (2021) Alzeley, Omar, et al. توزيع (New Exponential-X Fréchet)، قدم (2022) Ekrany A., et al. توزيع (Extended Weibull- Fréchet)، أيضًا قدم (2022) Showkat A., et al. نموذج نو سنة معالم كتعميم جديد لتوزيع فريشيه يسمى توزيع (Additive Trinomial Fréchet)، وأخيرًا قدم (2022) Alshanbari, Huda M., et al. توزيع (Novel alpha power Fréchet).

يأخذ هذا البحث بالنهج الذي قدمه Alizadeh et al. (2018) لتوليد توزيعات جديدة باستخدام عائلة Odd log-logistic family of distributions (OLL) حيث تكون دالة التوزيع التراكمي ودالة الكثافة الاحتمالية للعائلة (على الترتيب) الشكل التالي:

$$G_{OLL-G}(x) = \frac{F(x, \xi)^\alpha}{F(x, \xi)^\alpha + \bar{F}(x, \xi)^\alpha}, \quad x, \alpha > 0 \quad (1)$$

$$g_{OLL-G}(x) = \frac{\alpha f(x, \xi) \{F(x, \xi) \bar{F}(x, \xi)\}^{\alpha-1}}{\{F(x, \xi)^\alpha + \bar{F}(x, \xi)^\alpha\}^2}, \quad x, \alpha > 0 \quad (2)$$

حيث  $\bar{F}(x, \xi) = 1 - F(x, \xi)$ ، وتمثل  $G(x)$  دالة التوزيع التراكمية للتوزيع المراد تعميمه باستخدام هذه العائلة (توزيع فريشيه) وتمثل  $g(x) = dG(X)/dX$

ويهدف هذا البحث إلى اشتقاق توزيع جديد كأحد التعميمات الجديدة الخاصة بتوزيع فريشيه باستخدام العائلة اللوجيستية اللوغاريتمية الفردية يسمى توزيع Odd log-logistic Fréchet (OLLFr).

### (١) توزيع Odd Log Logistic Fréchet (OLLFr)

تأخذ دالة التوزيع التراكمية cdf ودالة الكثافة الاحتمالية pdf لتوزيع فريشيه الشكل التالي:

$$F(x; \delta, \xi) = e^{-\left(\frac{\delta}{x}\right)^\xi}; \quad x > 0, \quad \delta, \xi > 0 \quad (3)$$

$$f(x; \delta, \xi) = \xi \delta^\xi x^{-\xi-1} e^{-\left(\frac{\delta}{x}\right)^\xi}; \quad x > 0, \quad \delta, \xi > 0 \quad (4)$$

حيث تمثل  $\delta$  معلمة مقياس Scale، وتمثل  $\xi$  معلمة شكل Shape.

فمن خلال التعويض بالمعادلات (3) و (4) في المعادلات (1) و (2) نحصل على دالة cdf ودالة pdf لتوزيع (OLLFr) (على الترتيب) كالتالي:

$$G(x) = \frac{e^{-\alpha\left(\frac{\delta}{x}\right)^\xi}}{e^{-\alpha\left(\frac{\delta}{x}\right)^\xi} + \left[1 - e^{-\left(\frac{\delta}{x}\right)^\xi}\right]^\alpha} \quad \alpha, \delta \text{ and } \xi > 0, \quad x > 0 \quad (5)$$

$$g(x) = \frac{\alpha \xi \delta^\xi x^{-\xi-1} e^{-\alpha\left(\frac{\delta}{x}\right)^\xi} \left[1 - e^{-\left(\frac{\delta}{x}\right)^\xi}\right]^{\alpha-1}}{\left[e^{-\alpha\left(\frac{\delta}{x}\right)^\xi} + \left[1 - e^{-\left(\frac{\delta}{x}\right)^\xi}\right]^\alpha\right]^2} \quad \alpha, \delta \text{ and } \xi > 0, \quad x > 0$$

حيث تمثل  $\delta$  معلمة مقياس (scale parameter)، و تمثل  $\xi$  ،  $\alpha$  معلمتي شكل (shape parameters)، وسوف نرمز للمتغير العشوائي X الذي يتبع توزيع Odd Log Logistic Fréchet بالرمز  $[X \sim \text{OLLFr}(\alpha, \xi, \delta)]$

وتأخذ دالة البقاء s(x) Survival function لتوزيع (OLLFr) الصورة التالية:

$$S(x) = \frac{\left[1 - e^{-\left(\frac{\delta}{x}\right)^\xi}\right]^\alpha}{e^{-\alpha\left(\frac{\delta}{x}\right)^\xi} + \left[1 - e^{-\left(\frac{\delta}{x}\right)^\xi}\right]^\alpha}$$

كما تأخذ كل من دالة Hazard rate function h(x) ودالة Cumulative hazard function H(x) لتوزيع (OLLFr) (على الترتيب) الشكل التالي:

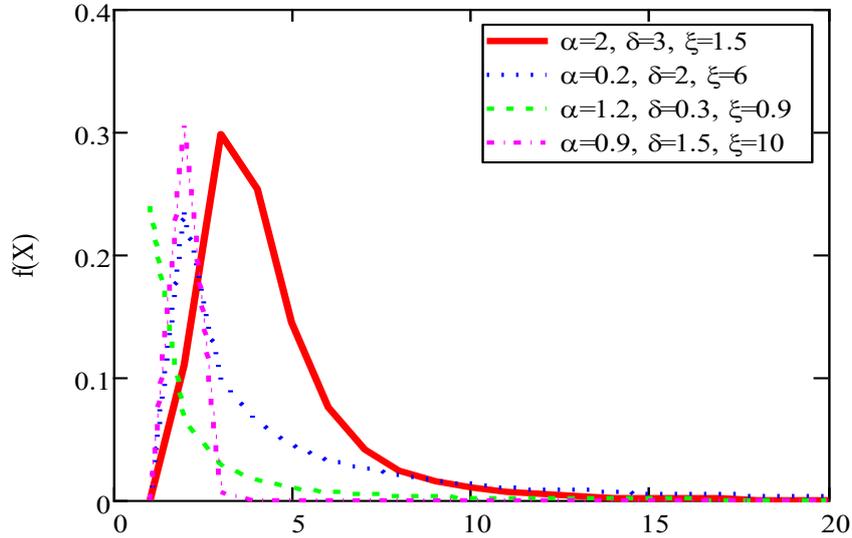
$$h(x) = \frac{\alpha \xi \delta^\xi x^{-\xi-1} e^{-\alpha \left(\frac{\delta}{x}\right)^\xi} \left[1 - e^{-\left(\frac{\delta}{x}\right)^\xi}\right]^{-1}}{e^{-\alpha \left(\frac{\delta}{x}\right)^\xi} + \left[1 - e^{-\left(\frac{\delta}{x}\right)^\xi}\right]^\alpha}$$

$$H(x) = -\ln \frac{\left[1 - e^{-\left(\frac{\delta}{x}\right)^\xi}\right]^\alpha}{e^{-\alpha \left(\frac{\delta}{x}\right)^\xi} + \left[1 - e^{-\left(\frac{\delta}{x}\right)^\xi}\right]^\alpha}$$

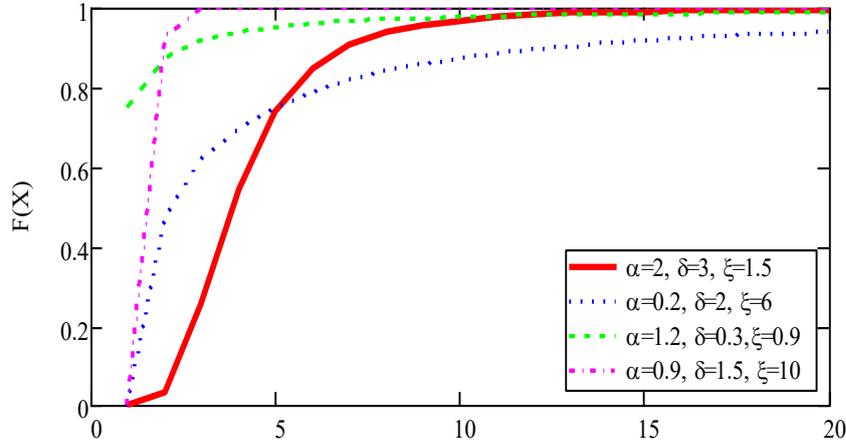
كما تأخذ دالة الخطر العكسية Reversed hazard rate  $r(x)$  لتوزيع (OLLFr) الصورة التالية:

$$r(x) = \frac{\alpha \xi \delta^\xi x^{-\xi-1} \left[1 - e^{-\left(\frac{\delta}{x}\right)^\xi}\right]^{-1}}{e^{-\alpha \left(\frac{\delta}{x}\right)^\xi} + \left[1 - e^{-\left(\frac{\delta}{x}\right)^\xi}\right]^\alpha}$$

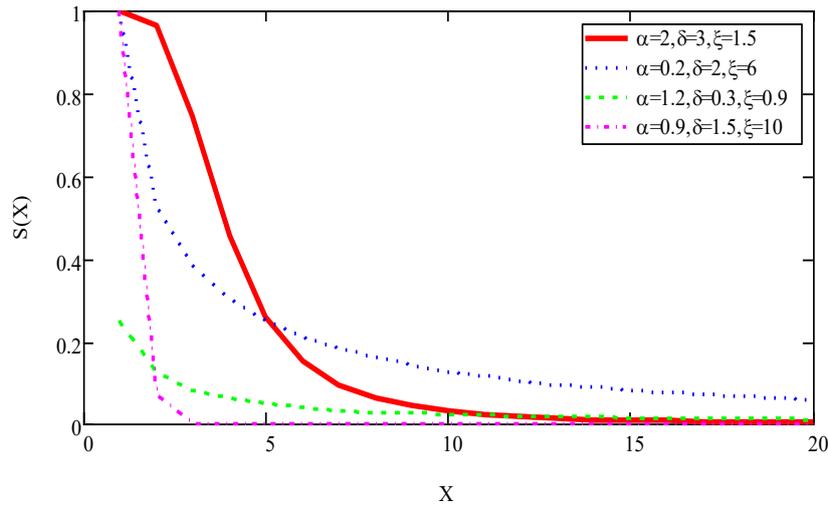
يعرض الشكل (1) والشكل (2) بعض المنحنيات الممكنة لدالة كثافة الاحتمال pdf ودالة التوزيع التجميعية cdf (على الترتيب) لتوزيع (OLLFr) عند بعض القيم المختلفة للمعلمات، كما يعرض الشكل (3) دالة البقاء Survival function لنفس التوزيع عند قيم مختلفة للمعلمات.



شكل (1): دالة pdf لتوزيع (OLLFr) عند قيم مختلفة للمعلمات



شكل (2): دالة cdf لتوزيع (OLLFr) عند قيم مختلفة للمعلمات



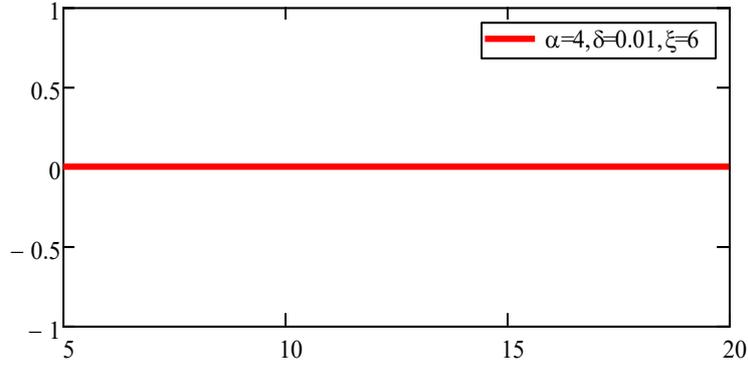
شكل (3): دالة Survival Function لتوزيع (OLLFr) عند قيم مختلفة للمعلمات

يعرض الشكل (4) بعض المنحنيات الممكنة لدالة  $h(x)$  حيث أنها قد تكون ثابتة أو متزايدة أو متناقصة عند بعض القيم المختلفة للمعلمات، لذلك يمكن استخدامها بشكل فعال في تحليل بيانات العمر والبقاء على قيد الحياة. نلاحظ أن دالة hrf لتوزيع (OLLFr) يمكن أن تكون:

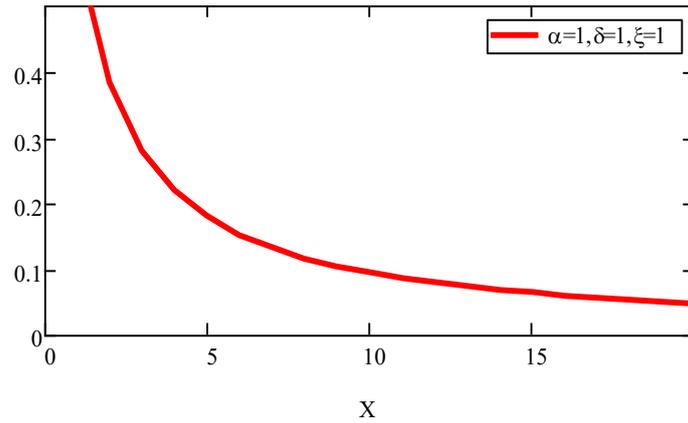
- (أ) ثابتة Constant عند قيم المعلمات  $\alpha = 4, \delta = 0.01, \xi = 6$ .
- (ب) رتيبة متناقصة Monotonically decreasing عند قيم المعلمات  $\alpha = 1, \delta = 1, \xi = 1$ .
- (ج) رأساً على عقب Upside-down عند قيم المعلمات  $\alpha = 4, \delta = 1.1, \xi = 2$ .
- (د) عكسية Reverse عند قيم المعلمات  $\alpha = 1.25, \delta = 0.0001, \xi = 3$ .
- (هـ) طردية Orthodox عند قيم المعلمات  $\alpha = 15, \delta = 35, \xi = 0.08$ .

(و) متزايدة Increasing عند قيم المعلمات  $\alpha = 29, \delta = 14, \xi = 0.08$ .

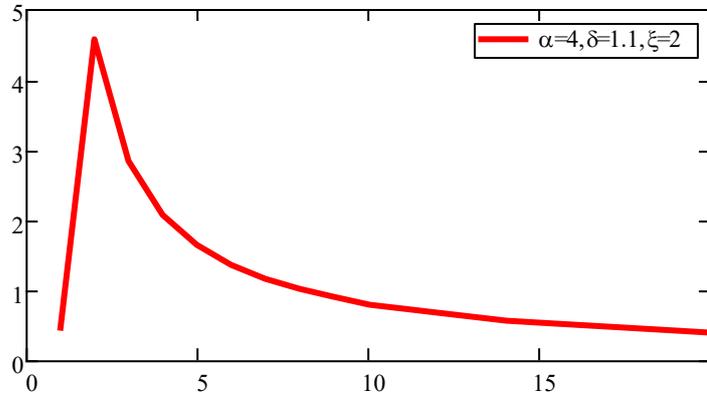
(ي) J Shape عند قيم المعلمات  $\alpha = 30, \delta = 19, \xi = 3.5$ .



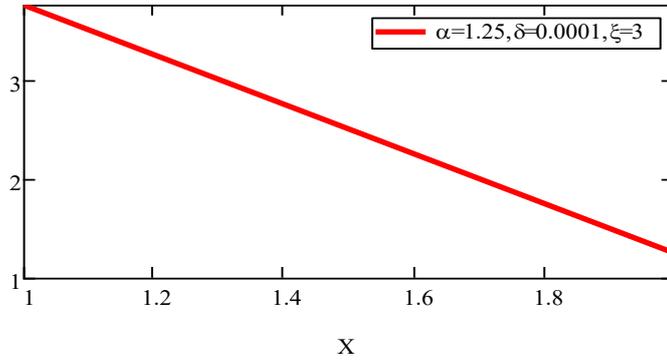
شكل (4-أ): Constant hrf



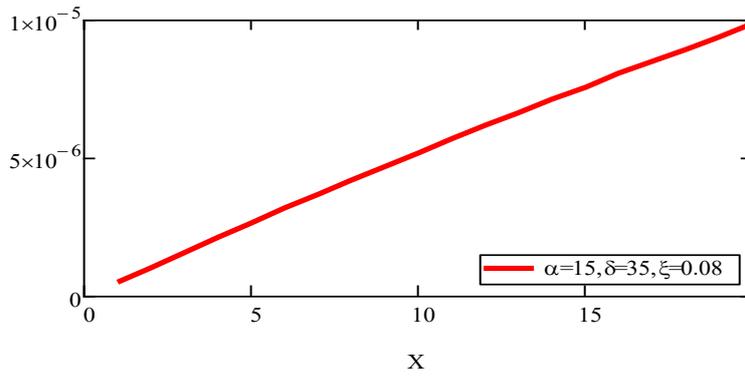
شكل (4-ب): Monotonically decreasing hrf



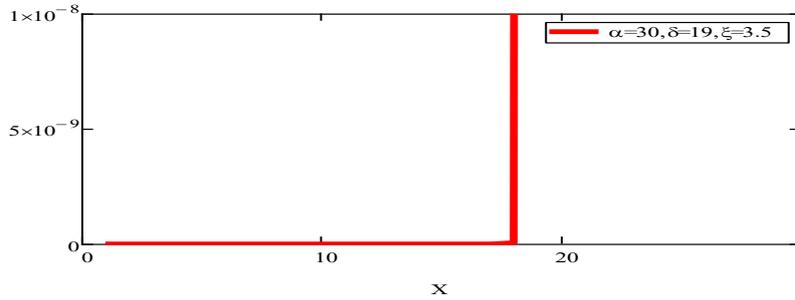
شكل (ج-4): Upside-down  $X$  hrf



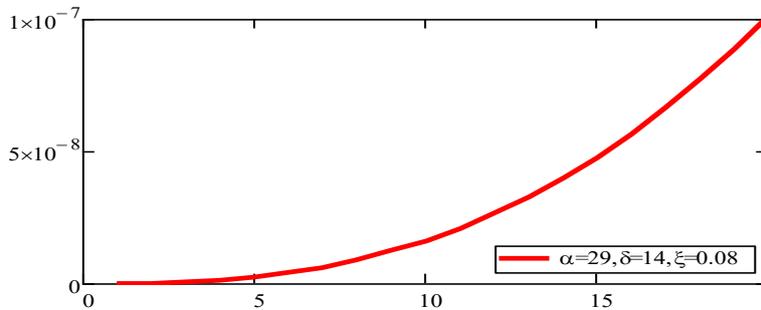
شكل (د-4): Reverse hrf



شكل (هـ-4): Increasing hrf



شكل (4-و): Orthodox hrf



شكل (4-ع): J Shape hrf

## (2) التمثيل الخطي لدالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع (OLLFr)

في هذا الجزء سوف يتم عرض صورة أخرى لكل من دالة التوزيع التجميعية ودالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع (OLLFr) كتركيبية خطية من دوال الكثافات الاحتمالية وذلك عن طريق إجراء بعض عمليات التبسيط للمعادلة (5) فإذا كان توسيع ذو الحدين المعمم (generalized binomial expansion) يأخذ الصورة التالية:

$$\left[ e^{-\left(\frac{\delta}{x}\right)^\xi} \right]^\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \left[ e^{-\left(\frac{\delta}{x}\right)^\xi} \right]^j \quad (6)$$

حيث

$$a_j = \sum_{i=j}^{\infty} (-1)^{i+j} \binom{\alpha}{i} \binom{i}{j}$$

وأيضاً إذا كانت

$$e^{-\alpha\left(\frac{\delta}{x}\right)^\xi} + \left[ 1 - e^{-\left(\frac{\delta}{x}\right)^\xi} \right]^\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} b_j \left[ e^{-\left(\frac{\delta}{x}\right)^\xi} \right]^j \quad (7)$$

حيث أن:

$$b_j = a_j + (-1)^j \binom{\alpha}{j}$$

بتطبيق العلاقات الرياضية (6) و (7) في المعادلة (5) نحصل على الصورة:

$$F(x) = \frac{\sum_{j=0}^{\infty} a_j \left[ e^{-\left(\frac{\delta}{x}\right)^{\xi}} \right]^j}{\sum_{j=0}^{\infty} b_j \left[ e^{-\left(\frac{\delta}{x}\right)^{\xi}} \right]^j}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} C_j \left[ e^{-\left(\frac{\delta}{x}\right)^{\xi}} \right]^j$$

حيث أن  $C_0 = \frac{a_0}{b_0}$  وعندما  $j \geq 1$  يكون:

$$C_j = b_0^{-1} \left( a_j - b_0^{-1} \sum_{r=1}^j b_r C_{j-r} \right)$$

إذاً يمكن كتابة دالة التوزيع التجميعية لتوزيع (OLLFr) كالتالي:

$$F(x) = \sum_{j=0}^{\infty} C_j H_j \left( x; \delta j^{\frac{1}{\xi}}, \xi \right) \quad (8)$$

حيث

$$H_j(x) = F(x)^j = e^{-\left(\frac{\delta j^{1/\xi}}{x}\right)^{\xi}}$$

ويتضح من المعادلة (8) أنه يمكن التعبير عن دالة التوزيع التجميعية لتوزيع (OLLFr)

بتركيبية خطية من دوال الكثافات الاحتمالية لتوزيع (Fr) حيث  $H[x; \delta j^{\frac{1}{\xi}}, \xi]$  تعبر عن دالة التوزيع

التجميعية لتوزيع (Fr) بمعلمة شكل  $\xi$  ومعلمة مقياس  $\delta j^{\frac{1}{\xi}}$ .

ومن المعادلة (8) نحصل على دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع (OLLFr) كتركيبية خطية من

دوال الكثافات الاحتمالية لتوزيع (Fr) وتأخذ الصورة التالية:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} C_{j+1} h_{j+1} \left( x; \delta j^{\frac{1}{\xi}}, \xi \right) \quad (9)$$

$$h_{j+1}(x) = (j+1) f(x) F(x)^j \quad \text{حيث}$$

$$= (j + 1) \xi \delta^\xi x^{-\xi-1} e^{-\left(\frac{\delta}{x}\right)^\xi} e^{-\left(\frac{\delta j^{1/\xi}}{x}\right)^\xi}$$

وبالتالي يمكن الحصول على الخصائص الهيكلية لتوزيع (OLLFr) بسهولة من خلال خصائص توزيع (Fr).  
تعبّر عن دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع (Fr) بمعلمة شكل  $\xi$  ومعلمة مقياس  $\delta j^{1/\xi}$  ،

### (3) بعض الخصائص الهيكلية لتوزيع (OLLFr)

في هذا الجزء سوف يتم إيجاد بعض الخصائص الهيكلية لتوزيع (OLLFr) مثل دالة الكوانتيل والعزوم التقليدية والعزوم غير الكاملة وغيرها.

#### (3-1) دالة الكوانتيل Quantile Function

يمكن الحصول على دالة الكوانتيل لمتغير عشوائي  $X$  يتبع توزيع (OLLFr) من خلال إيجاد معكوس الدالة (5). وتأخذ دالة الكوانتيل لتوزيع (OLLFr) الصورة التالية:

$$x_u = -\delta \left\{ \log \frac{u^{1/\alpha}}{u^{1/\alpha} + (1-u)^{1/\alpha}} \right\}^{-1/\xi} \quad (10)$$

ومن خلال المعادلة (10) يمكن الحصول على أرقام عشوائية تتبع توزيع (OLLFr) باستخدام المحاكاة بسهولة، كما يمكن إيجاد قيمة الوسيط لتوزيع (OLLFr) عن طريق التعويض عن  $(u = 0.5)$  في المعادلة (10) وكذلك إيجاد الرباعيات عند  $(u = 0.25)$  و  $(u = 0.75)$ .

#### (3-2) العزوم التقليدية Ordinary Moments

بفرض أن  $Y$  متغير عشوائي يتبع توزيع (Fr) بمعلمات  $\delta$  و  $\xi$  ، إذاً يأخذ العزم من الدرجة  $r$  للمتغير العشوائي  $Y$  الشكل التالي:

$$\mu'_r = E(x^r) = \delta^r \Gamma \left( 1 - \frac{r}{\xi} \right) \quad (11)$$

وبالتالي فإن العزم من الدرجة  $r$  للمتغير العشوائي  $X$  الذي يتبع توزيع (OLLFr) تأخذ الصورة التالية:

$$\begin{aligned} \mu'_r = E(x^r) &= \sum_{j=0}^{\infty} C_j \int_0^{\infty} x^r h_j \left( x; \delta j^{1/\xi}, \xi \right) . dx \\ &= \delta^r \Gamma \left( 1 - \frac{r}{\xi} \right) \sum_{j=0}^{\infty} C_j \left( j^{r/\xi} \right) \quad \text{حيث } r < \xi \end{aligned} \quad (12)$$

وبوضع  $(r=1)$  في المعادلة (12) نحصل على متوسط المتغير العشوائي  $X$ .

$$\mu'_1 = E(x) = \delta \Gamma \left( 1 - \frac{1}{\xi} \right) \sum_{j=0}^{\infty} C_j \left( j^{1/\xi} \right)$$

$$\mu'_2 = E(x^2) = \delta^2 \Gamma \left(1 - \frac{2}{\xi}\right) \sum_{j=0}^{\infty} C_j \left(j^{\frac{2}{\xi}}\right)$$

$$\mu'_3 = E(x^3) = \delta^3 \Gamma \left(1 - \frac{3}{\xi}\right) \sum_{j=0}^{\infty} C_j \left(j^{\frac{3}{\xi}}\right)$$

$$\mu'_4 = E(x^4) = \delta^4 \Gamma \left(1 - \frac{4}{\xi}\right) \sum_{j=0}^{\infty} C_j \left(j^{\frac{4}{\xi}}\right)$$

كما يمكن الحصول على التباين كما يلي:

$$Var(x) = \delta^2 \Gamma \left(1 - \frac{2}{\xi}\right) \sum_{j=0}^{\infty} C_j \left(j^{\frac{2}{\xi}}\right) - \left\{ \delta \Gamma \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \sum_{j=0}^{\infty} C_j \left(j^{\frac{1}{\xi}}\right) \right\}^2$$

وتأخذ العزوم المركزية الشكل التالي:

$$\mu_n = E(x - \mu_1)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} (-\mu_1)^{n-r} - \mu_r$$

وبالتالي فإن العزوم المركزية لتوزيع (OLLFr) يمكن وضعها على الصورة التالية:

$$\mu_n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} (-\mu_1)^{n-r} \delta^r \Gamma \left(1 - \frac{r}{\xi}\right) \sum_{j=0}^{\infty} C_j \left(j^{\frac{r}{\xi}}\right)$$

كما يمكننا الحصول على مقاييس الالتواء والتفرطح وتكون على الصورة التالية:

$$\gamma_1 = \frac{\delta^3 \Gamma \left(1 - \frac{3}{\xi}\right) \sum_{j=0}^{\infty} C_j \left(j^{\frac{3}{\xi}}\right) - 3\delta^2 \Gamma \left(1 - \frac{2}{\xi}\right) \sum_{j=0}^{\infty} C_j \left(j^{\frac{2}{\xi}}\right) \left[ \delta \Gamma \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \sum_{j=0}^{\infty} C_j \left(j^{\frac{1}{\xi}}\right) \right] + 2 \left[ \delta \Gamma \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \sum_{j=0}^{\infty} C_j \left(j^{\frac{1}{\xi}}\right) \right]^3}{\left[ \delta^2 \Gamma \left(1 - \frac{2}{\xi}\right) \sum_{j=0}^{\infty} C_j \left(j^{\frac{2}{\xi}}\right) - \left[ \delta \Gamma \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \sum_{j=0}^{\infty} C_j \left(j^{\frac{1}{\xi}}\right) \right]^2 \right]^{3/2}}$$

$$\gamma_2 = \frac{\delta^4 \Gamma \left(1 - \frac{4}{\xi}\right) \sum_{j=0}^{\infty} C_j \left(j^{\frac{4}{\xi}}\right) - 4\delta^3 \Gamma \left(1 - \frac{3}{\xi}\right) \sum_{j=0}^{\infty} C_j \left(j^{\frac{3}{\xi}}\right) \left[ \delta \Gamma \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \sum_{j=0}^{\infty} C_j \left(j^{\frac{1}{\xi}}\right) \right] + 6\delta^2 \Gamma \left(1 - \frac{2}{\xi}\right) \sum_{j=0}^{\infty} C_j \left(j^{\frac{2}{\xi}}\right) \left[ \delta \Gamma \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \sum_{j=0}^{\infty} C_j \left(j^{\frac{1}{\xi}}\right) \right]}{\left[ \delta^2 \Gamma \left(1 - \frac{2}{\xi}\right) \sum_{j=0}^{\infty} C_j \left(j^{\frac{2}{\xi}}\right) - \left[ \delta \Gamma \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \sum_{j=0}^{\infty} C_j \left(j^{\frac{1}{\xi}}\right) \right]^2 \right]^2}$$

### (3-3) العزوم غير الكاملة Incomplete Moments

بفرض أن Y متغير عشوائي يتبع توزيع فريشيه (Fr) بمعلمات  $\delta$  و  $\xi$  ، فإن العزوم غير الكاملة من الدرجة r للمتغير Y حيث  $(r < \xi)$  تأخذ الشكل التالي:

$$\varphi_r(t) = \delta^r \Gamma \left( 1 - \frac{r}{\xi}, \left( \frac{\delta}{t} \right)^\xi \right) \quad (13)$$

حيث  $\gamma(d, z) = \int_0^z y^{d-1} e^{-y} dy$  هي دالة جاما الدنيا غير الكاملة lower incomplete gamma function

ويمكن الحصول على العزوم غير الكاملة لتوزيع (OLLFr) من خلال المعادلة (9) بفرض أن  $[X \sim \text{OLLFr}(\alpha, \xi, \delta)]$  فإن العزوم غير الكاملة من الدرجة  $r$  للمتغير  $X$  حيث  $(r < \xi)$  تأخذ الصورة التالية:

$$\varphi_r(t) = \delta^r \sum_{j=0}^{\infty} C_j \left( \frac{r}{\xi} \right) \Gamma \left( 1 - \frac{r}{\xi}, j \left( \frac{\delta}{t} \right)^\xi \right) \quad (14)$$

وبالتعويض عن  $(r=1)$  في المعادلة (13) ينتج العزم غير الكامل الأول للمتغير  $X$ ، ويرمز له بالرمز  $m_1(t)$ ، كما يمكن حساب The mean residual life الذي يعرف كالتالي  $m_1(t) = \frac{[1-\varphi_1(t)]}{R(t)}$  وأيضاً حساب The mean waiting time الذي يعرف كالتالي  $M_1(t) = t - \frac{\varphi_1(t)}{G(T)}$

#### العزم الأول للانحرافات (Mean Deviation) حول المتوسط والوسيط

يفرض أن  $\mu_1$  ترمز لمتوسط توزيع (OLLFr) و  $M$  ترمز للوسيط لنفس التوزيع، إذاً يأخذ كل من العزم الأول للانحراف حول  $\mu_1$  والعزم الأول للانحراف حول  $M$  لتوزيع (OLLFr) الصورة التالية (على الترتيب):

$$\psi_1 = E[|X - \mu_1|] = \int_0^{\infty} |X - \mu_1| g(x) dx = 2\mu_1 G(\mu_1) - 2\varphi_1(\mu_1)$$

$$\psi_2 = E[|X - M|] = \int_0^{\infty} |X - M| g(x) dx = \mu_1 - 2\varphi_1(M)$$

حيث  $\varphi_1(\cdot)$  ترمز إلى العزم الكامل الأول ويمكن الحصول عليه من المعادلة (14) بالتعويض عن  $(r=1)$  وأيضاً يمكن الحصول على  $G(\mu_1)$  من خلال المعادلة (5).

#### (3-4) الإحصاءات الترتيبية لتوزيع (OLLFr)

تأخذ دالة الكثافة الإحصائية للإحصاء الترتيبى من الرتبة  $(r)$  حيث  $1 \leq r \leq n$  للمتغيرات العشوائية المستقلة والمتماثلة في التوزيع  $X_1, X_2, \dots, X_n$  والتي تتبع توزيع (OLLFr) الصورة التالية:

$$g(x_{r:n}) = c_{(r)} \alpha \xi \delta^\xi x^{-\xi-1} y^{\alpha r} \frac{[1-y]^{\alpha(n-r+1)-1}}{[y^\alpha + [1-y]^\alpha]^{n+2r+1}}$$

حيث

$$y = e^{-\left(\frac{\delta}{x}\right)^\xi}, \quad c_{(r)} = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}$$

ويمكن الحصول على الإحصاء الترتيبى الأول والأخير على الترتيب من خلال التعويض في المعادلة كالتالي:

$$g(x_{1:n}) = n\alpha \xi \delta^\xi x^{-\xi-1} y^{\alpha r} \frac{[1-y]^{\alpha(n-r+1)-1}}{[y^\alpha + [1-y]^\alpha]^{n+2r+1}}$$

$$g(x_{n:n}) = \alpha \xi \delta^\xi x^{-\xi-1} y^{\alpha r} \frac{[1-y]^{\alpha(n-r+1)-1}}{[y^\alpha + [1-y]^\alpha]^{n+2r+1}}$$

(4) تقدير معالم توزيع (OLLFr) Odd Log Logistic Fréchet

في هذا الجزء تم استخدام بعض طرق التقدير لإيجاد مقدرات معالم توزيع (OLLFr)

(4-1) تقدير معالم توزيع (OLLFr) باستخدام طريقة الإمكان الأعظم (MLE)

بفرض أن  $X_1, X_2, \dots, X_n$  متغيرات عشوائية مستقلة ومتماثلة في التوزيع (I.I.D) Independently and Identically Distributed وتتبع توزيع (OLLFr) بمعلمات مجهولة  $\theta = (\alpha, \delta, \xi)^T$ ، فإن دالة الإمكان اللوغاريتمية  $L(\theta)$  Log-Likelihood function تأخذ الصورة التالية:

$$\begin{aligned} L(\theta) = & n \log \alpha + n \log \xi + n \xi \log \delta - (\xi + 1) \sum \log x_i - \alpha \sum \left(\frac{\delta}{x_i}\right)^\xi \\ & + (\alpha - 1) \sum \log \left[1 - e^{-\left(\frac{\delta}{x_i}\right)^\xi}\right] \\ & - 2 \sum \log \left[ e^{-\alpha \left(\frac{\delta}{x_i}\right)^\xi} + \left(1 - e^{-\left(\frac{\delta}{x_i}\right)^\xi}\right)^\alpha \right] \end{aligned} \quad (15)$$

يمكن الحصول على مقدرات الإمكان الأعظم من خلال إيجاد التفاضل الجزئي الأول للدالة  $L(\theta)$  بالنسبة لكل معلمة من المعلمات ومساواة النواتج بالصفر.

يأخذ التفاضل الجزئي الأول للمعادلة (15) بالنسبة للمعلمات  $\theta = (\alpha, \delta, \xi)^T$  الصور التالية:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \alpha} = & \frac{n}{\alpha} - \sum \left(\frac{\delta}{x_i}\right)^\xi + \sum \log \left[1 - e^{-\left(\frac{\delta}{x_i}\right)^\xi}\right] \\ & - 2 \sum \frac{-e^{-\alpha \left(\frac{\delta}{x_i}\right)^\xi} + \left(1 - e^{-\left(\frac{\delta}{x_i}\right)^\xi}\right)^\alpha \ln \left[1 - e^{-\left(\frac{\delta}{x_i}\right)^\xi}\right]}{\left[ e^{-\alpha \left(\frac{\delta}{x_i}\right)^\xi} + \left(1 - e^{-\left(\frac{\delta}{x_i}\right)^\xi}\right)^\alpha \right]} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \delta}$$

$$= \frac{n\xi}{\delta} - \alpha\xi \sum \frac{\delta^{\xi-1}}{x_i^\xi} + (\alpha-1) \frac{\xi e^{-\left(\frac{\delta}{x_i}\right)^\xi} \frac{\delta^{\xi-1}}{x_i^\xi}}{1 - e^{-\left(\frac{\delta}{x_i}\right)^\xi}}$$

$$- 2 \sum \frac{-\alpha\xi \frac{\delta^{\xi-1}}{x_i^\xi} e^{-\alpha\left(\frac{\delta}{x_i}\right)^\xi} + \alpha\xi \frac{\delta^{\xi-1}}{x_i^\xi} e^{-\left(\frac{\delta}{x_i}\right)^\xi} \left(1 - e^{-\left(\frac{\delta}{x_i}\right)^\xi}\right)^{\alpha-1}}{\left[e^{-\alpha\left(\frac{\delta}{x_i}\right)^\xi} + \left(1 - e^{-\left(\frac{\delta}{x_i}\right)^\xi}\right)^\alpha\right]}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \xi}$$

$$= \frac{n}{\xi} + n \log \delta - \sum \log x_i - \alpha \sum \left(\frac{\delta}{x_i}\right) \ln \left(\frac{\delta}{x_i}\right)$$

$$+ (\alpha-1) \sum \frac{e^{-\alpha\left(\frac{\delta}{x_i}\right)^\xi} \left(\frac{\delta}{x_i}\right)^\xi \ln \left(\frac{\delta}{x_i}\right)}{\left(1 - e^{-\left(\frac{\delta}{x_i}\right)^\xi}\right)}$$

$$- 2 \sum \frac{\alpha \left(\frac{\delta}{x_i}\right)^\xi e^{-\alpha\left(\frac{\delta}{x_i}\right)^\xi} \ln \left(\frac{\delta}{x_i}\right) + \alpha \left(\frac{\delta}{x_i}\right)^\xi e^{-\left(\frac{\delta}{x_i}\right)^\xi} \ln \left(\frac{\delta}{x_i}\right) \left(1 - e^{-\left(\frac{\delta}{x_i}\right)^\xi}\right)^{\alpha-1}}{\left[e^{-\alpha\left(\frac{\delta}{x_i}\right)^\xi} + \left(1 - e^{-\left(\frac{\delta}{x_i}\right)^\xi}\right)^\alpha\right]}$$

ويمكن الحصول على تقديرات الإمكان الأعظم للمعلمات المجهولة من خلال حل المعادلات غير الخطية التالية:

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \delta} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \xi} = 0$$

(4-2) تقدير معلمات توزيع (OLLFr) باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية (OLS)

بفرض أن دالة التوزيع للمتغيرات العشوائية التي تتبع توزيع (OLLFr)  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  و  $X_{1:n} < X_{2:n} < \dots < X_{n:n}$  هي المتغيرات العشوائية الترتيبية المقابلة لها، فإنه يتم الحصول على تقدير المربعات الصغرى (OLS) من خلال تدنية الدالة التالية:-

$$S(\alpha, \delta, \xi) = \sum_{i=1}^n \left[ F(x_{i:n} | \alpha, \delta, \xi) - \frac{i}{n+1} \right]^2$$

وبالتالي يمكن الحصول على المقدرات ( $\hat{\alpha}_{OLSE}$ ،  $\hat{\delta}_{OLSE}$ ،  $\hat{\xi}_{OLSE}$ ) للمعالم ( $\alpha, \delta, \xi$ ) من خلال حل المعادلات غير الخطية التالية:

$$\frac{\partial S(\alpha, \delta, \xi)}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^n \left[ F(x_{i:n} | \alpha, \delta, \xi) - \frac{i}{n+1} \right] \Delta_1(x_{i:n} | \alpha, \delta, \xi) = 0,$$

$$\frac{\partial S(\alpha, \delta, \xi)}{\partial \delta} = \sum_{i=1}^n \left[ F(x_{i:n} | \alpha, \delta, \xi) - \frac{i}{n+1} \right] \Delta_2(x_{i:n} | \alpha, \delta, \xi) = 0,$$

$$\frac{\partial S(\alpha, \delta, \xi)}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^n \left[ F(x_{i:n} | \alpha, \delta, \xi) - \frac{i}{n+1} \right] \Delta_3(x_{i:n} | \alpha, \delta, \xi) = 0.$$

حيث

$$\Delta_1(x_{i:n} | \alpha, \delta, \xi) = \frac{e^{-\alpha \cdot \left(\frac{\delta}{x}\right)^\xi} \cdot \left[\ln \left[1 - e^{-\left(\frac{\delta}{x}\right)^\xi}\right] \cdot \left[1 - e^{-\left(\frac{\delta}{x}\right)^\xi}\right]^\alpha - e^{-\alpha \cdot \left(\frac{\delta}{x}\right)^\xi} \cdot \left(\frac{\delta}{x}\right)^\xi\right]}{\left[ e^{-\alpha \cdot \left(\frac{\delta}{x}\right)^\xi} + \left[1 - e^{-\left(\frac{\delta}{x}\right)^\xi}\right]^\alpha \right]^2} - \frac{e^{-\alpha \cdot \left(\frac{\delta}{x}\right)^\xi} \cdot \left(\frac{\delta}{x}\right)^\xi}{e^{-\alpha \cdot \left(\frac{\delta}{x}\right)^\xi} + \left[1 - e^{-\left(\frac{\delta}{x}\right)^\xi}\right]^\alpha} \quad (16)$$

$$\Delta_2(x_{i:n} | \alpha, \delta, \xi) = \frac{e^{-\alpha \cdot \left(\frac{\delta}{x}\right)^\xi} \cdot \left[ \frac{-\alpha \cdot \left(\frac{\delta}{x}\right)^\xi \cdot \xi \cdot \alpha \cdot e^{-\alpha \cdot \left(\frac{\delta}{x}\right)^\xi} \cdot \left(\frac{\delta}{x}\right)^{\xi-1} - \left(\frac{\delta}{x}\right)^\xi \cdot \xi \cdot \alpha \cdot e^{-\alpha \cdot \left(\frac{\delta}{x}\right)^\xi} \cdot \left(\frac{\delta}{x}\right)^{\xi-1} \cdot \left[1 - e^{-\left(\frac{\delta}{x}\right)^\xi}\right]^{\alpha-1}}{x} \right]}{\left[ e^{-\alpha \cdot \left(\frac{\delta}{x}\right)^\xi} + \left[1 - e^{-\left(\frac{\delta}{x}\right)^\xi}\right]^\alpha \right]^2} - \frac{e^{-\alpha \cdot \left(\frac{\delta}{x}\right)^\xi} \cdot \left(\frac{\delta}{x}\right)^{\xi-1} \cdot \xi \cdot \alpha \cdot e^{-\alpha \cdot \left(\frac{\delta}{x}\right)^\xi}}{x \left[ e^{-\alpha \cdot \left(\frac{\delta}{x}\right)^\xi} + \left[1 - e^{-\left(\frac{\delta}{x}\right)^\xi}\right]^\alpha \right]} \quad (17)$$

$$\Delta_3(x_{i:n}|\alpha, \delta, \xi)$$

=

$$\frac{e^{-\alpha \cdot \left(\frac{\delta}{x}\right)^\xi} \left[ \alpha \cdot \ln\left(\frac{\delta}{x}\right) \cdot e^{-\alpha \cdot \left(\frac{\delta}{x}\right)^\xi} \cdot \left(\frac{\delta}{x}\right)^\xi - \alpha \cdot \ln\left(\frac{\delta}{x}\right) \cdot e^{-\left(\frac{\delta}{x}\right)^\xi} \cdot \left(\frac{\delta}{x}\right)^\xi \left[ 1 - e^{-\left(\frac{\delta}{x}\right)^\xi} \right]^{\alpha-1} \right]}{\left[ e^{-\alpha \cdot \left(\frac{\delta}{x}\right)^\xi} + \left[ 1 - e^{-\left(\frac{\delta}{x}\right)^\xi} \right]^\alpha \right]^2} - \frac{\alpha \cdot \ln\left(\frac{\delta}{x}\right) \cdot e^{-\alpha \cdot \left(\frac{\delta}{x}\right)^\xi} \cdot \left(\frac{\delta}{x}\right)^\xi}{e^{-\alpha \cdot \left(\frac{\delta}{x}\right)^\xi} + \left[ 1 - e^{-\left(\frac{\delta}{x}\right)^\xi} \right]^\alpha} \quad (18)$$

هذه المعادلات لا يمكن الحصول على حل لها وذلك يتم حلها عددياً باستخدام حزم البرامج الرياضية MathCAD(15).

#### (4-3) تقدير معالم توزيع (OLLFr) باستخدام طريقة المربعات الصغرى المرجحة (WLS)

بفرض أن دالة التوزيع للمتغيرات العشوائية  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  التي تتبع توزيع (OLLFr) و  $X_{1:n} < X_{2:n} < \dots < X_{n:n}$  هي المتغيرات العشوائية الترتيبية المقابلة لها، فإنه يتم الحصول على تقدير المربعات الصغرى المرجحة (WLS) من خلال تدنية الدالة التالية:-

$$W(\alpha, \delta, \xi) = \sum_{i=1}^n \frac{(n+1)^2(n+2)}{i(n-i+1)} \left[ F(x_{i:n}|\alpha, \delta, \xi) - \frac{i}{n+1} \right]^2$$

وبالتالي يمكن الحصول على المقدرات  $(\hat{\alpha}_{WLS}, \hat{\delta}_{WLS}, \hat{\xi}_{WLS})$  للمعالم  $(\alpha, \delta, \xi)$  من خلال حل المعادلات الغير خطية التالية:

$$\frac{\partial W(\alpha, \delta, \xi)}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^n \left[ F(x_{i:n}|\alpha, \delta, \xi) - \frac{i}{n+1} \right] \Delta_1(x_{i:n}|\alpha, \delta, \xi) = 0,$$

$$\frac{\partial W(\alpha, \delta, \xi)}{\partial \delta} = \sum_{i=1}^n \left[ F(x_{i:n}|\alpha, \delta, \xi) - \frac{i}{n+1} \right] \Delta_2(x_{i:n}|\alpha, \delta, \xi) = 0,$$

$$\frac{\partial W(\alpha, \delta, \xi)}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^n \left[ F(x_{i:n}|\alpha, \delta, \xi) - \frac{i}{n+1} \right] \Delta_3(x_{i:n}|\alpha, \delta, \xi) = 0.$$

حيث  $\Delta_1(x_{i:n}|\alpha, \delta, \xi)$  و  $\Delta_2(x_{i:n}|\alpha, \delta, \xi)$  و  $\Delta_3(x_{i:n}|\alpha, \delta, \xi)$  تم اشتقاقها في المعادلات (16) و (17) و (18). يتم حل هذه المعادلات عددياً باستخدام حزم البرامج الرياضية MathCAD(15).

#### (4-4) تقدير معالم توزيع (OLLFr) باستخدام طريقة كرامر - فون - ميزس (CVM)

يمكن الحصول على المقدرات ( $\hat{\alpha}_{CME}$ ،  $\hat{\delta}_{CME}$ ،  $\hat{\xi}_{CME}$ ) للمعالم ( $\alpha, \delta, \xi$ ) من خلال تندية الدالة التالية:

$$C(\theta) = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n \left[ F(x_{i:n}|\alpha, \delta, \xi) - \frac{2i-1}{2n} \right]^2$$

وبحل المعادلات غير الخطية التالية تم الحصول على مقدرات كرامر - فون - ميزس (CVM):

$$\sum_{i=1}^n \left[ F(x_{i:n}|\alpha, \delta, \xi) - \frac{2i-1}{2n} \right] \Delta_1(x_{i:n}|\alpha, \delta, \xi) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n \left[ F(x_{i:n}|\alpha, \delta, \xi) - \frac{2i-1}{2n} \right] \Delta_2(x_{i:n}|\alpha, \delta, \xi) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n \left[ F(x_{i:n}|\alpha, \delta, \xi) - \frac{2i-1}{2n} \right] \Delta_3(x_{i:n}|\alpha, \delta, \xi) = 0.$$

حيث  $\Delta_1(x_{i:n}|\alpha, \delta, \xi)$  و  $\Delta_2(x_{i:n}|\alpha, \delta, \xi)$  و  $\Delta_3(x_{i:n}|\alpha, \delta, \xi)$  تم اشتقاقها في المعادلات (16) و (17) و (18). يتم حلها عددياً باستخدام حزم البرامج الرياضية (MathCAD15).

#### (5) دراسة محاكاة توزيع (OLLFr)

تم إجراء دراسة محاكاة مونت كارلو لمقارنة أداء المقدرات المختلفة لمعلمات توزيع (OLLFr) حيث تم توليد الأرقام العشوائية باستخدام دالة الكوانتيل لتوزيع (OLLFr) لتقدير المعالم باستخدام أربعة طرق تقدير وقد تم المقارنة بين طريقة الإمكان الأعظم MLE وطريقة المربعات الصغرى العادية OLS وطريقة المربعات الصغرى المرجحة WLS وطريقة كرامر - فون - ميزس CVM في تقدير المعالم المختلفة ( $\alpha, \delta, \xi$ ) لتوزيع (OLLFr) باستخدام محاكاة مونت كارلو عن طريق توليد مجتمع من البيانات تتبع توزيع (OLLFr) من خلال تكرار كل عينة 1000 تكرار لكل تجربة، أما العينات المفترضة فقد تم سحب عينات ذات أحجام (كبيرة، متوسطة، صغيرة) حيث تم إجراء المحاكاة عند أحجام عينات (n=10,15,20,30,50) وتم اختيار قيم افتراضية للمعلمات كما يلي:

I:  $\alpha = 1.50, \delta = 0.50, \xi = 0.90$

II:  $\alpha = 2, \delta = 0.10, \xi = 0.60$

III:  $\alpha = 2, \delta = 2, \xi = 3$

ومن خلال نتائج المحاكاة التي تم عرضها في الملحق المرافق في الجداول للحالات الثلاثة لتوزيع (OLLFr) توصلت الدراسة للآتي:

١- يتضح أن قيم المقدرات  $\alpha, \delta, \xi$  تقترب بدرجة كبيرة من القيم الفعلية لمعلمات توزيع

(OLLFr) عند زيادة حجم العينة.

٢- كلما زاد حجم العينة زادت جودة تقدير النموذج باستخدام طرق التقدير المختلفة وذلك من

خلال تناقص قيم معايير الجودة Bais, RMSE, S.E.

٣- بشكل عام تبين أفضل طريقة الإمكان الأعظم MLE عن باقي طرق التقدير المستخدمة لأحجام عينات مختلفة وذلك من خلال نسبة الكفاءة لتقدير معالم توزيع (OLLFr).

### (6) التطبيق العملي لتوزيع (OLLFr):

يتضمن هذا الجزء إثبات مرونة توزيع (OLLFr) بالتطبيق على مجموعتين مختلفتين من البيانات حيث تم في البداية تقدير معالم توزيع (OLLFr) عددياً باستخدام طريقة الإمكان الأعظم عن طريق استخدام الحزمة الإحصائية (MathCAD(15)، ثم تم استخدام تلك التقديرات في التأكد من جودة توفيق التوزيع للبيانات باستخدام اختبار كولومجروف-سميرنوف وحساب قيمة (P-value). كما تم استخدام بعض مقاييس جودة التوفيق المستخدمة في معظم الدراسات المتعلقة بموضوع الدراسة مثل (AIC، BIC، HQIC، CAIC، A\*، W\*) لمقارنه التوزيع الجديد (OLLFr) بكل من توزيع فريشيه Fréchet (Fr) وبعض التعميمات الأخرى لتوزيع فريشيه وهي: كوماراسوامي فريشيه Kumaraswamy Fréchet (KFr)، فريشيه الأسّي Exponential Fréchet (EFr)، بيتا فريشيه Beta Fréchet (BFr)، مارشال أولكن فريشيه Marshall-Olkin Fréchet (MOFr). وتأخذ دوال الكثافة الاحتمالية لهذه التوزيعات الصور التالية:

$$Fr: f(x; \xi, \delta) = \xi \delta^\xi x^{-\xi-1} e^{-\left(\frac{\delta}{x}\right)^\xi}$$

$$KFr: f(x; \delta, \xi, a, b) = ab \xi \delta^\xi x^{-\xi-1} e^{-a \left(\frac{\delta}{x}\right)^\xi} \left[1 - e^{-a \left(\frac{\delta}{x}\right)^\xi}\right]^{b-1}$$

$$EFr: f(x; \delta, \xi, a) = a \xi \delta^\xi x^{-\xi-1} e^{-\left(\frac{\delta}{x}\right)^\xi} \left[1 - e^{-\left(\frac{\delta}{x}\right)^\xi}\right]^{a-1}$$

$$BFr: f(x; \delta, \xi, a, b) = \frac{\xi \delta^\xi}{B(a, b)} x^{-\xi-1} e^{-a \left(\frac{\delta}{x}\right)^\xi} \left[1 - e^{-\left(\frac{\delta}{x}\right)^\xi}\right]^{b-1}$$

$$MOFr: f(x; \delta, \xi, \alpha) = \alpha \xi \delta^\xi x^{-\xi-1} e^{-\left(\frac{\delta}{x}\right)^\xi} \left[\alpha + (1 - \alpha) e^{-\left(\frac{\delta}{x}\right)^\xi}\right]^{-2}$$

كما تم تقدير معالم التوزيع الجديد (OLLFr) عددياً باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية (OLS) Ordinary Least-Square وطريقة المربعات الصغرى المرجحة (WLS) Weighted Least-Square وطريقة كرامر-فون-ميزس (CVM) Cramér-Von mises باستخدام برنامج (MathCAD(15) وذلك بالتطبيق على المجموعة الثانية من البيانات، ثم تم استخدام تلك التقديرات في التأكد من جودة توفيق التوزيع الجديد (OLLFr) للبيانات باستخدام بعض مقاييس جودة التوفيق المستخدمة في معظم الدراسات المتعلقة بموضوع الدراسة وهي (A\*، W\*، P-Value، K.S) ومقارنة نتائج طرق التقدير المختلفة (MLE، OLS، WLS، CVM) لإيجاد أفضل طريقة لتقدير معالم التوزيع الجديد (OLLFr).

#### • المجموعة الأولى من البيانات:

تم توفيق هذه المجموعة في معظم الدراسات السابقة المهمة بتعميم توزيع (Fr) وتتضمن هذه البيانات فترة البقاء لعدد ٧٢ من خنازير غينيا بعد حقنهم بمصل معين وتم نشرها بواسطة Bjerkedal (1960)

في الجدول التالي (1) سوف يتم عرض تقديرات طريقة الإمكان الأعظم لمعاملات التوزيع الجديد (OLLFr) ذو الثلاثة معالم، وأيضاً تقديرات طريقة الإمكان الأعظم للتوزيعات المقارنة كذلك الخطأ المعياري (S.E). كما يوضح جدول (2) النتائج الخاصة بحساب مقاييس جوده التوفيق ( $A^*$ ،  $W^*$ ،  $AIC$ ،  $BIC$ ،  $HQIC$ ،  $CAIC$ ) لتوزيع (OLLFr) ذو الثلاثة معالم، وللتوزيعات المقارنة باستخدام برنامج (15) MathCAD باستخدام تقديرات الإمكان الأعظم في جدول (1).

جدول (1) يوضح تقديرات الإمكان الأعظم لمعاملات توزيع (OLLFr) والتوزيعات المقارنة للمجموعة الأولى من البيانات

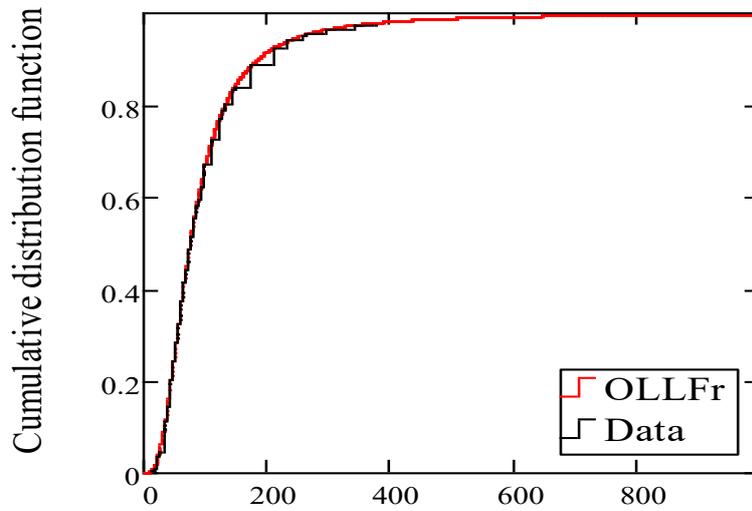
تقديرات الإمكان الأعظم					التوزيع
b	a	$\xi$	$\delta$	$\alpha$	
-	-	0.0341 (0.36654)	25.437 (29.19117)	5.36459 (5.82145)	OLLFr
8.2723 (0.979)	45.7326 (0.092)	0.6207 (0.003)	0.7111 (0.013)	-	KFr
20.1331 (7.26)	19.9786 (7.246)	0.322 (0.00115)	24.5032 (0.087)	-	BFr
-	-	1.7855 (0.193)	13.991 (2.964)	14.9816 (4.6305)	MOFr
-	-	1.4148 (0.00271)	54.1888 (0.111)	-	Fr
-	8.2723 (7.953)	0.6207 (0.208)	336.3679 (374.803)	-	EFr

جدول (2) يوضح بعض مقاييس جودة التوفيق لتوزيع (OLLFr) والتوزيعات المقارنة للمجموعة الأولى من البيانات

مقاييس جودة التوفيق									التوزيع
W*	A*	P-Value	k.s	CAIC	HQIC	BIC	AIC	-2L	
0.09574	0.5504	0.629	0.088	785.9	788.2	792.3	785.4	779.4	OLLFr
0.128	0.723	0.249	0.12	789.1	792.1	797.6	788.5	780.5	KFr
0.203	1.633	0.469	0.100	789.2	792.3	797.7	788.6	780.6	BFr
0.168	1.33	0.579	0.089	796.5	798.8	802.9	796.1	790.1	MOFr
0.215	1.283	0.064	0.152	795.5	797.1	799.9	795.3	791.3	Fr
0.631	4.141	0.435	0.100	786.9	789.2	793.3	786.5	780.5	EFr

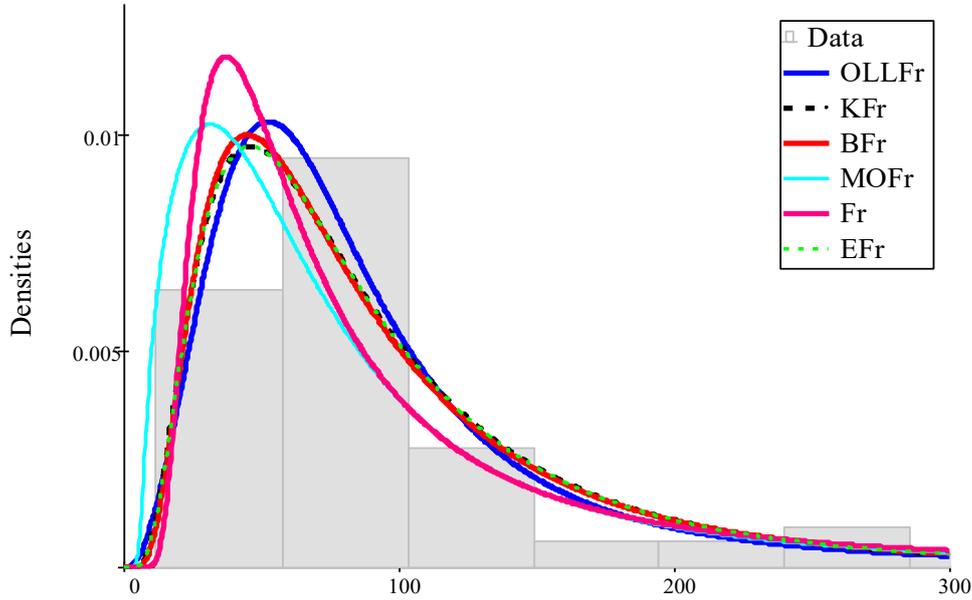
يتضح من الجدول السابق أن توزيع (OLLFr) يعد أفضل توزيع لتوفيق البيانات طبقاً لمقاييس  $(k.s, P\text{-value}, A^*, W^*)$ ؛ حيث أن توزيع (OLLFr) له أقل قيمة للإحصاءات  $(A^*, W^*)$ ، كما أن له أعلى قيمة للـ  $P\text{-value}$ .

ويتضح من خلال رسم دالة التوزيع التجميعية للتعيم الجديد (OLLFr) والدالة التجريبية Empirical function لمجموعة البيانات الأولى أن هذا التعيم الجديد (OLLFr) قادر على توفيق البيانات بشكل جيد ويظهر ذلك في الشكل (5).



شكل (5): توفيق دالة cdf لتوزيع (OLLFr) للمجموعة الأولى من البيانات

كذلك برسم دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع (OLLFr) ودوال الكثافة الاحتمالية للتوزيعات المقارنة ومقارنتها برسم Histogram pdf لمجموعة البيانات الأولى محل الدراسة تبين أن توزيع (OLLFr) يعطى أفضل توفيق للبيانات ويتضح ذلك من الشكل (6).



شكل (6): توفيق دالة pdf لتوزيع (OLLFr) والتوزيعات المقارنة للمجموعة الأولى من البيانات

● المجموعة الثانية من البيانات:

تتضمن هذه المجموعة ٥٩ مشاهدة لبعض حالات الوفاة من جميع الفئات العمرية لمرضى الكبد المتوفين أثناء خضوعهم لبروتوكول العلاج لدى المركز التخصصي للقلب والجهاز الهضمي بدمياط والتي حدثت في الفترة من ٢٠١٩/١/١ إلى ٢٠٢٠/١/١.

يوضح الجدول (3) تقديرات طريقة الإمكان الأعظم لمعاملات التوزيع الجديد (OLLFr) ذو الثلاثة معالم، وأيضاً تقديرات طريقة الإمكان الأعظم للتوزيعات المقارنة وذلك اعتماداً على المجموعة الثانية من البيانات. يوضح جدول (4) مدى تفوق توزيع (OLLFr) على جميع التوزيعات المقارنة الأخرى في توفيق هذه المجموعة من البيانات وفقاً لجميع مقاييس جودة التوفيق المستخدمة؛ حيث أن توزيع (OLLFr) له أقل قيمة للمقاييس ( $AIC$ ،  $BIC$ ،  $HQIC$ ،  $CAIC$ ،  $A^*$ ،  $W^*$ ) كما أن له أعلى قيمة للـ  $P$ -value. مما يثبت قدرته على التوفيق الأمثل لبيانات البقاء المتطرفة.

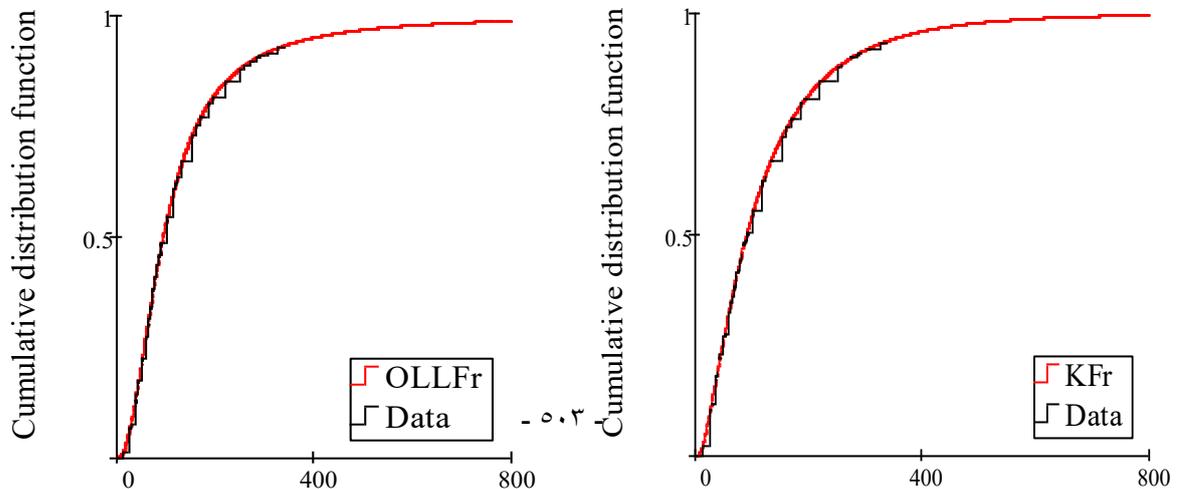
جدول (3) يوضح تقديرات الإمكان الأعظم لمعاملات توزيع (OLLFr) والتوزيعات المقارنة للمجموعة الثانية من البيانات

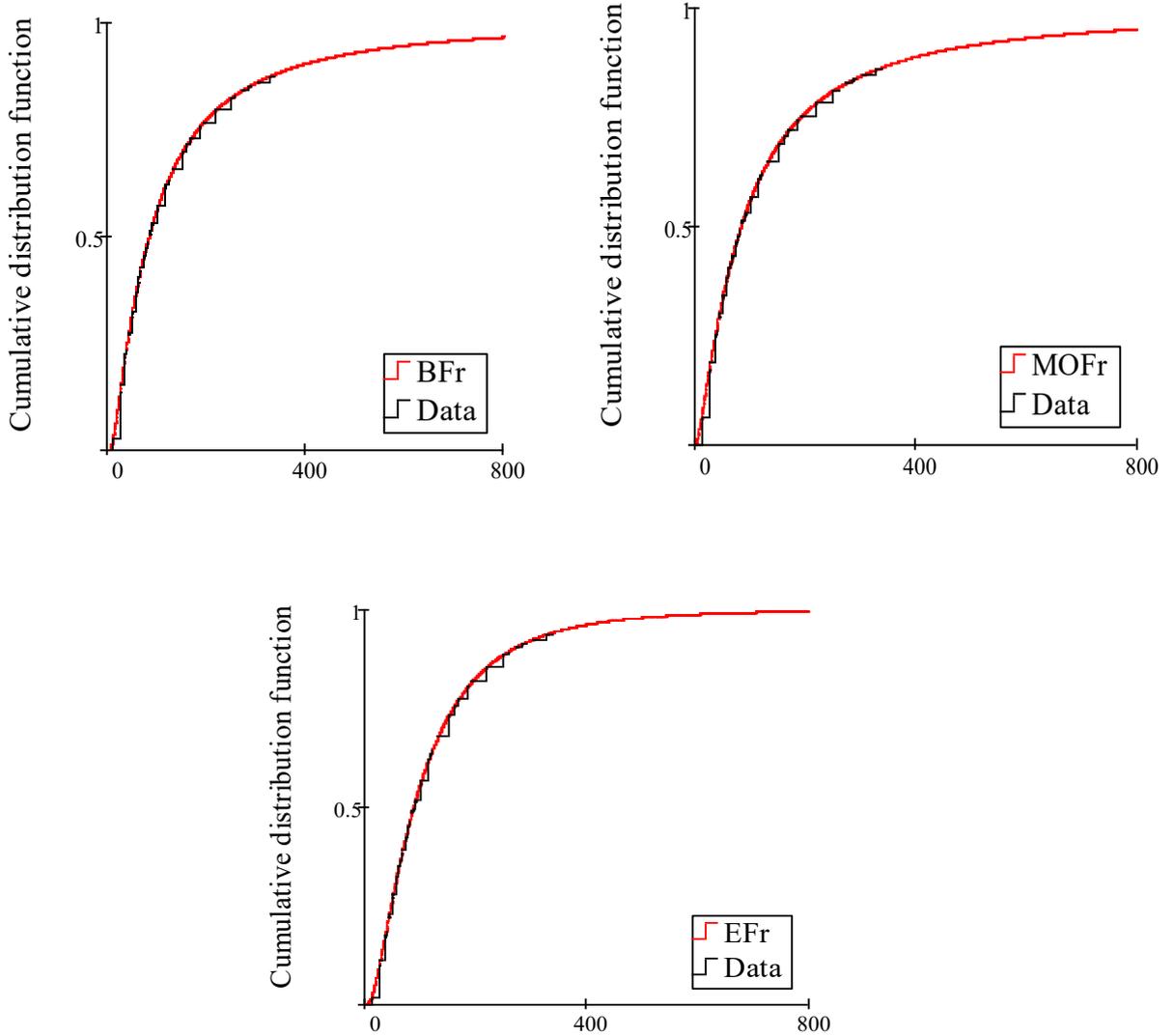
تقديرات الإمكان الأعظم					التوزيع
b	a	$\xi$	$\delta$	$\alpha$	
-	-	0.033	0.00121	45.07506	OLLFr
52.869	7.196	0.285	15.241	-	KFr
10.317	17.017	0.285	5.862	-	BFr
-	-	1.309	4.979	39.251	MOFr
-	-	0.698	51.385	-	Fr
-	32.389	0.329	0.005324	-	EFr

جدول (4) يوضح بعض مقاييس جودة التوفيق لتوزيع (OLLFr) والتوزيعات المقارنة للمجموعة الثانية من البيانات

مقاييس جودة التوفيق									التوزيع
W*	A*	P-Value	K.S	CAIC	HQIC	BIC	AIC	-2L	
0.045	0.483	0.94	0.069	688.52	690.51	694.31	688.08	682.08	OLLFr
0.069	0.69	0.75	0.088	694.24	696.75	701.81	693.50	685.50	KFr
0.203	0.1633	0.253	0.132	710.92	713.43	718.49	710.18	702.18	BFr
0.168	1.443	0.092	0.162	709.55	711.54	715.34	709.11	703.11	MOFr
0.576	3.832	0.003	0.236	738.35	739.76	742.29	738.13	734.13	Fr
0.079	0.778	0.792	0.085	694.14	696.14	699.94	693.71	687.71	EFr

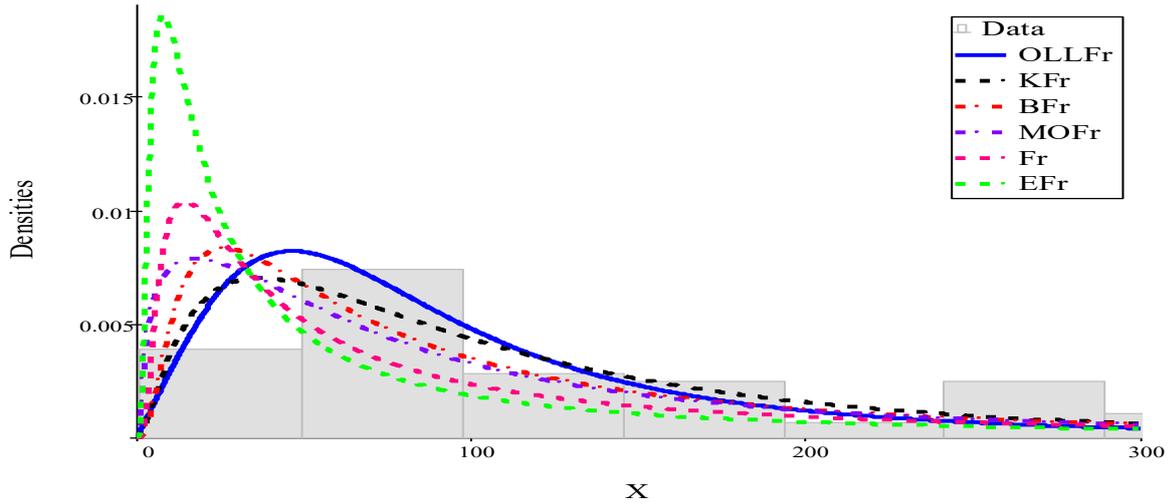
يعرض الشكل (7) مقارنة الدالة التجريبية Empirical function لمجموعة البيانات الثانية بدالة التوزيع التجميعية للتعميم الجديد (OLLFr) وبعض التوزيعات المقارنة، ويتضح من خلال الرسم أن التعميم الجديد (OLLFr) قادر على توفيق البيانات بشكل جيد مقارنة ببعض تعميمات توزيع فريشيه (Fr) الأخرى.





شكل (7): توفيق دالة cdf لتوزيع (OLLFr) وبعض التوزيعات المقارنة للمجموعة الثانية من البيانات

أيضاً برسم دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع (OLLFr) ودوال الكثافة الاحتمالية للتوزيعات المقارنة ومقارنتها برسم histogram pdf لمجموعة البيانات الثانية محل الدراسة تبين أن توزيع (OLLFr) مرونة أكثر في توفيق البيانات مما يجعله أفضل للتوزيعات في توفيق هذه المجموعة من البيانات ويتضح ذلك من الشكل (8) كالتالي:



شكل (8): توفيق دالة pdf لتوزيع (OLLFr) والتوزيعات المقارنة للمجموعة الثانية من البيانات

الجدول (5) يوضح تقديرات قيم المعالم باستخدام طرق التقدير المختلفة لتوزيع (OLLFr) وكذلك الخطأ المعياري (S.E) لطريقة الإمكان الأعظم.

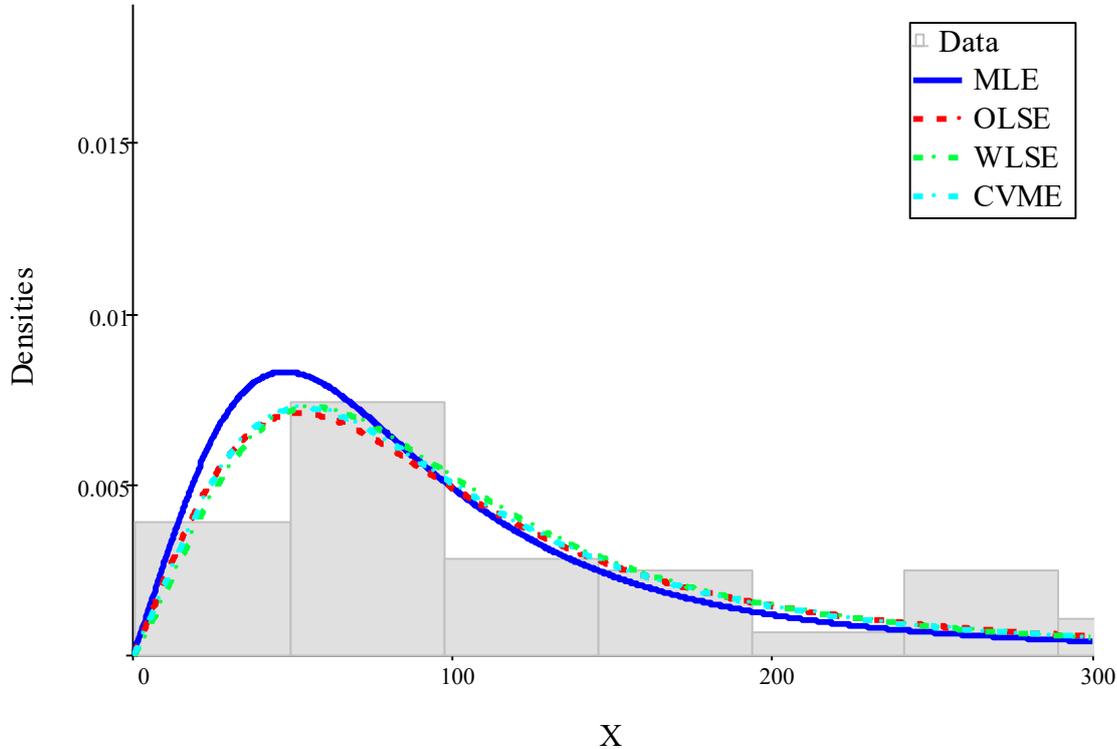
Model	Methods	Estimates		
		$\alpha$	$\delta$	$\xi$
OLLFr ( $\alpha, \delta, \xi$ )	MLE	45.075 (9.92272)	0.0012 (0.00261)	0.033 (0.00623)
	OLS	13.285	3.017	0.107
	WLS	13.897	3.224	0.109
	CVM	13.544	3.08	0.108

يوضح جدول (6) اختبار توفيق توزيع (OLLFr) للمجموعة الثانية من البيانات باستخدام طرق التقدير (الإمكان الأعظم، المربعات الصغرى العادية، المربعات الصغرى المرجحة، كرامر-قون - ميزس) من خلال الحصول على قيم بعض مقاييس جودة التوفيق وهي ( $P$ ،  $A^*$ ،  $W^*$ ) باستخدام برنامج (K.S, Value) باستخدام برنامج (MathCAD(15). كما تم المقارنة بينهم لإيجاد أفضل مقدر لتقدير معاملات توزيع (OLLFr).

Model	Method	Estimates			
		K.S	P-Value	W*	A*
OLLFr ( $\alpha, \delta, \xi$ )	MLE	0.069	0.94	0.0447	0.48357
	OLS	0.077	0.873	0.04792	0.51863
	WLS	0.068	0.93	0.04729	0.51154
	CVM	0.073	0.914	0.04755	0.51488

يوضح الجدول السابق أن مقدر الإمكان الأعظم للمجموعة الثانية من البيانات هو أفضل مقدر لتقدير معالم توزيع (OLLFr) وفقاً لجميع مقاييس جودة التوفيق المستخدمة حيث أن مقدر (MLE) له أقل قيمة للمقاييس ( $K.S, A^*, W^*$ ) وأعلى قيمة لمقياس P-Value.

برسم دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع (OLLFr) باستخدام نتائج طرق التقدير المختلفة ومقارنتها برسم Histogram pdf للمجموعة الثانية من البيانات محل الدراسة تبين أن مقدر الإمكان الأعظم هو أفضل مقدر لتقدير معالم توزيع (OLLFr) ويوضح الشكل (9) أن منحنى مقدر الإمكان الأعظم (MLE) لتوزيع (OLLFr) يعطى مرونة أعلى في توفيق البيانات مقارنة بطرق التقدير الأخرى (OLS, WLS, CVM).



شكل (9): توفيق دالة pdf لتوزيع (OLLFr) للمجموعة الثانية من البيانات باستخدام طرق التقدير المختلفة

#### (7) النتائج

في هذه الدراسة تم الحصول على تعميم جديد لتوزيع فريشييه (Fr) باستخدام العائلة اللوجيستية اللوغاريتمية الفردية المولدة للتوزيعات (OLL-G) Odd-log-logistic generated family (OLLFr) Odd Log- Logistic Fréchet (OLLFr)، كما تم دراسة بعض الخصائص الهيكلية للتعميم الجديد (OLLFr) مثل دالة معدل الخطر ودالة معدل الخطر التجميعية ودالة البقاء ودالة الكوانتيل والعزوم التقليدية والعزوم غير الكاملة، والإحصاءات الترتيبية والعزوم الخطية وغيرها. وأيضاً تم تقدير معالم التعميم الجديد (OLLFr) باستخدام أربعة طرق تقدير مختلفة، وهي: طريقة الإمكان الأعظم وطريقة المربعات الصغرى العادية (OLS) وطريقة المربعات الصغرى المرجحة (WLS) وطريقة كرامر- فون - ميزس (CVM). كما تم تقديم دراسة محاكاة مونت كارلو للتعميم الجديد (OLLFr) باستخدام الحزمة الإحصائية (MathCAD(15) والحصول على تقديرات لطرق التقدير الأربعة لمقارنة أداء طرق التقدير المختلفة بناءً على بعض معايير جودة التوفيق، وتم إثبات أفضلية طريقة الإمكان الأعظم MLE عن باقي طرق التقدير المستخدمة لأحجام عينات مختلفة. كما تم إثبات كفاءة التعميم الجديد (OLLFr) في توفيق مجموعتين مختلفتين من البيانات المجموعة الأولى المجموعة الأولى عبارة عن بيانات خاصة بفترة البقاء لخنازير غينيا بعد حقنهم بمصل معين وتم استخدامها من قبل العديد من الباحثين الذين قاموا بدراسة تعميمات أخرى لتوزيع فريشييه، أما المجموعة الثانية فهي عبارة عن بيانات بعض حالات الوفاة لمرضى الكبد أثناء خضوعهم لبروتوكول العلاج لدي المركز التخصصي للقلب والجهاز الهضمي بدمياط. وباستخدام بعض مقاييس جودة

التوفيق ( $AIC, BIC, HQIC, CAIC, A^*, W^*$ ) تمكنت الدراسة من مقارنة التعميم الجديد (OLLFr) بكل من التوزيعات ( $MOFr, Fr, BFr, KFr, EFr$ ) وإثبات أن التعميم الجديد (OLLFr) يعطى دقة أعلى في توفيق مجموعتي البيانات محل الدراسة. وأثبتت الدراسة عن طريق المقارنة بين نتائج طرق التقدير المختلفة أن مقدر الإمكان الأعظم (MLE) هو أفضل مقدر لتقدير معالم توزيع (OLLFr) وفقاً لجميع مقاييس جودة التوفيق المستخدمة حيث أن مقدر له أقل قيمة للمقاييس ( $K.S, A^*, W^*$ ) وأعلى قيمة لمقياس P-Value وذلك بالتطبيق على المجموعة الثانية من البيانات.

### المراجع:

1. Abd-Elfattah, A. M. and Omima, A. M. (2009), "Estimation of Unknown Parameters of the Generalized Fréchet Distribution". *Journal of Applied Sciences Research*, 5, 1398-1408.
2. Abd-Elfattah, A. M., Assar, S. M. and Abd-Elghaffar, H. I. (2016), "Exponentiated Generalized Fréchet Distribution". *International Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 3(5), 39-48.
3. Afify, A. Z., Hamedani, G. G., Ghosh, I. and Mead, M. E. (2015), "The transmuted Marshall-Olkin Fréchet distribution: Properties and Applications". *International Journal of Statistics and Probability*, 4, 132-184.
4. Afify, A. Z., Yousof, H. M., Cordeiro, G. M., Nofal, Z. M. and Ahmed, M. (2016a), "The Kumaraswamy Marshall-Olkin Fréchet Distribution with Applications". *Journal of ISOSS*, 2(1), 41-58.
5. Afify, A. Z., Yousof, H. M., Cordeiro, G. M., Ortega, E. M. M. and Noval, Z. M. (2016b), "The Weibull Fréchet Distribution and its Applications". *Journal of Applied Statistics*, 1-22.
6. Alizadeh, M., Yousof, H. M., Rasekhi, M., & Altun, E. (2018). The odd log-logistic Poisson-G Family of distributions. *Journal of Mathematical Extension*, 12(1), 81-104.
7. Alshanbari, H. M., Gemeay, A. M., El-Bagoury, A. A. A. H., Khosa, S. K., Hafez, E. H., & Muse, A. H. (2022). A novel extension of Fréchet distribution: Application on real data and simulation. *Alexandria Engineering Journal*, 61(10), 7917-7938.
8. Alzeley, O., Almetwally, E. M., Gemeay, A. M., Alshanbari, H. M., Hafez, E. H., & Abu-Moussa, M. H. (2021). Statistical inference under censored data for the new exponential-X Fréchet distribution: Simulation and application to leukemia data. *Computational Intelligence and Neuroscience*, 2021.
9. Bjerkedal, T. (1960). Acquisition of resistance in guinea pigs infected with different doses of virulent tubercle bacilli. *Amer. J. Hyg.* 72:130-

- 148.
10. Eghwerido, J. T. (2020). The alpha power Weibull Fréchet distribution: properties and applications. *Turkish Journal of Science*, 5(3), 170-185.
  11. Hussein, E. A., Aljohani, H. M., & Afify, A. Z. (2022). The extended Weibull–Fréchet distribution: properties, inference, and applications in medicine and engineering. *AIMS Mathematics*, 7(1), 225-246.
  12. Kotz, S. and Nadarajah, S (2000), " Extreme Value Distribution: theory and applications". Imperial College Press, London.
  13. Lone, S. A., Sindhu, T. N., & Jarad, F. (2022). Additive Trinomial Fréchet distribution with practical application. *Results in Physics*, 33, 105087.
  14. Mansour, M.M., Aryal, G., Afify A.Z. and Ahmed M. (2018), "The Kumaraswamy Exponentiated Fréchet Distribution". *Pakistan Journal of Statistics*, 34(3), 177-193.
  15. Mead, M.E., Afify, A.Z., Hamedani, G.G. and Ghosh, I. (2017), "The Beta Exponential Fréchet Distribution with Applications". *Austrian Journal of Statistics*, 46, 41-63.
  16. Mohamed, M. I., Handique, L., Chakraborty, S., Butt, N. S., & Yousof, H. M. (2021). A new three-parameter Xgamma Fréchet distribution with different methods of estimation and applications. *Pakistan Journal of Statistics and Operation Research*, 291-308.
  17. Nadarajah, S. and Kotz, S. (2004), "The Beta Gumbel distribution". *Mathematical Problems in Engineering*, 10, 323-332.
  18. Oguntunde, P. E., Khaleel, M. A., Ahmed, M. T., & Okagbue, H. I. (2019). The Gompertz fréchet distribution: properties and applications. *Cogent Mathematics & Statistics*, 6(1), 1568662.
  19. Ramos, P. L., Louzada, F., Ramos, E., & Dey, S. (2020). The Fréchet distribution: Estimation and application-An overview. *Journal of Statistics and Management Systems*, 23(3), 549-578.
  20. Shafiq, A., Lone, S. A., Sindhu, T. N., El Khatib, Y., Al-Mdallal, Q. M., & Muhammad, T. (2021). A new modified Kies Fréchet distribution: Applications of mortality rate of Covid-19. *Results in Physics*, 28, 104638.
  ٢١. المغاوري، سالي أبو العينين (٢٠٢٠)، "تعميم جديد مقترح لتوزيع فريشيه" دراسة تطبيقية"، رسالة دكتوراه غير منشورة، كلية التجارة، جامعة المنصورة.

نتائج المحاكاة للحالات الثلاثة:

جدول (1) يوضح متوسط التقديرات ومعايير الجودة لمعاملات توزيع (OLLFr) عند أحجام العينات المختلفة والقيم الافتراضية للمعاملات (I)

(I: $\alpha = 1.50, \delta = 0.50, \xi = 0.90$ )						
n	Methods		ME	Bias	RMSE	S. E
10	MLE	$\alpha$	1.63701	0.13701	0.50231	0.04833
		$\delta$	0.53521	0.03521	0.15791	0.01539
		$\xi$	0.98633	0.08633	0.30572	0.02933
	OLS	$\alpha$	1.22335	-0.27665	0.50903	0.04273
		$\delta$	0.53057	0.03057	0.17298	0.01703
		$\xi$	0.85803	-0.04197	0.35839	0.03559
	WLS	$\alpha$	1.35745	-0.14255	0.53343	0.0514
		$\delta$	0.52878	0.02878	0.17009	0.01676
		$\xi$	0.86851	-0.03149	0.341	0.03395
	CVM	$\alpha$	1.42447	-0.07553	0.52845	0.0523
		$\delta$	0.535	0.035	0.17427	0.01707
		$\xi$	0.95513	0.05513	0.45033	0.04469
15	MLE	$\alpha$	1.57347	0.07347	0.36976	0.02416
		$\delta$	0.5203	0.0203	0.1194	0.00784
		$\xi$	0.9398	0.0398	0.19959	0.01304
	OLS	$\alpha$	1.30644	-0.19356	0.42323	0.02509
		$\delta$	0.51082	0.01082	0.12651	0.0084
		$\xi$	0.89155	-0.00845	0.30139	0.02009
	WLS	$\alpha$	1.42013	-0.07987	0.40197	0.02626
		$\delta$	0.50954	0.00954	0.12369	0.00822
		$\xi$	0.89806	-0.00194	0.28048	0.0187
	CVM	$\alpha$	1.45016	-0.04984	0.4339	0.02874
		$\delta$	0.5138	0.0138	0.12718	0.00843
		$\xi$	0.954	0.054	0.3367	0.02216
20	MLE	$\alpha$	1.5678	0.0678	0.31809	0.01554
		$\delta$	0.51295	0.01295	0.09939	0.00493
		$\xi$	0.93818	0.03818	0.1754	0.00856
	OLS	$\alpha$	1.34943	-0.15057	0.3639	0.01656
		$\delta$	0.51075	0.01075	0.10341	0.00514
		$\xi$	0.8779	-0.0221	0.2413	0.01201
			$\alpha$	1.44382	-0.05618	0.34136

	<b>WLS</b>	$\delta$	0.50943	0.00943	0.10004	0.00498
		$\xi$	0.88826	-0.01174	0.2216	0.01106
	<b>CVM</b>	$\alpha$	1.45815	-0.04185	0.36944	0.01835
		$\delta$	0.51301	0.01301	0.10374	0.00515
		$\xi$	0.92338	0.02338	0.26132	0.01301
<b>30</b>	<b>MLE</b>	$\alpha$	1.54558	0.04558	0.25539	0.00838
		$\delta$	0.50969	0.00969	0.07767	0.00257
		$\xi$	0.92909	0.02909	0.14577	0.00476
	<b>OLS</b>	$\alpha$	1.39227	-0.10773	0.28973	0.00897
		$\delta$	0.51025	0.01025	0.0862	0.00285
		$\xi$	0.88233	-0.01767	0.19893	0.0066
	<b>WLS</b>	$\alpha$	1.4678	-0.0322	0.26559	0.00879
		$\delta$	0.50969	0.00969	0.08405	0.00278
		$\xi$	0.89046	-0.00954	0.1765	0.00587
	<b>CVM</b>	$\alpha$	1.46676	-0.03324	0.28894	0.00957
		$\delta$	0.51182	0.01182	0.08655	0.00286
		$\xi$	0.91217	0.01217	0.20887	0.00695
<b>50</b>	<b>MLE</b>	$\alpha$	1.53155	0.03155	0.18891	0.00374
		$\delta$	0.50477	0.00477	0.05794	0.00115
		$\xi$	0.91849	0.01849	0.1058	0.00208
	<b>OLS</b>	$\alpha$	1.43421	-0.06579	0.21504	0.00409
		$\delta$	0.50797	0.00797	0.06384	0.00127
		$\xi$	0.88148	-0.01852	0.14466	0.00287
	<b>WLS</b>	$\alpha$	1.47975	-0.02025	0.19668	0.00391
		$\delta$	0.50654	0.00654	0.06401	0.00127
		$\xi$	0.89298	-0.00702	0.13181	0.00263
	<b>CVM</b>	$\alpha$	1.48615	-0.01385	0.22213	0.00443
		$\delta$	0.50319	0.00319	0.06564	0.00131
		$\xi$	0.91989	0.01989	0.16572	0.00329

جدول (2) يوضح متوسط التقديرات ومعايير الجودة لمعاملات توزيع (OLLFr) عند أحجام العينات المختلفة وقيم الافتراضية للمعاملات II

(II: $\alpha = 2, \delta = 0.10, \xi = 0.60$ )						
n	Methods		ME	Bias	RMSE	S. E
10	MLE	$\alpha$	2.17421	0.17421	0.68079	0.06581
		$\delta$	0.1076	0.0076	0.03598	0.00352
		$\xi$	0.64383	0.04383	0.18154	0.01762
	OLS	$\alpha$	1.60845	-0.39155	0.67863	0.05543
		$\delta$	0.10712	0.00712	0.03876	0.00381
		$\xi$	0.59936	-0.00064	0.25401	0.0254
	WLS	$\alpha$	1.76737	-0.23263	0.6352	0.05911
		$\delta$	0.10685	0.00685	0.03812	0.00375
		$\xi$	0.59426	-0.00574	0.23269	0.02326
	CVM	$\alpha$	1.87378	-0.12622	0.71528	0.07041
		$\delta$	0.1079	0.0079	0.03888	0.00381
		$\xi$	0.64985	0.04985	0.29911	0.02949
15	MLE	$\alpha$	2.10607	0.10607	0.48499	0.03155
		$\delta$	0.10565	0.00565	0.02931	0.00192
		$\xi$	0.62805	0.02805	0.1384	0.00904
	OLS	$\alpha$	1.73774	-0.26226	0.55423	0.03255
		$\delta$	0.10518	0.00518	0.02938	0.00193
		$\xi$	0.59264	-0.00736	0.18294	0.01219
	WLS	$\alpha$	1.87844	-0.12156	0.50637	0.03277
		$\delta$	0.10499	0.00499	0.02877	0.00189
		$\xi$	0.59007	-0.00993	0.16475	0.01096
	CVM	$\alpha$	1.92424	-0.07576	0.56041	0.03702
		$\delta$	0.1057	0.0057	0.02951	0.00193
		$\xi$	0.62287	0.02287	0.20051	0.01328
20	MLE	$\alpha$	2.08298	0.08298	0.39327	0.01922
		$\delta$	0.10441	0.00441	0.02318	0.00114
		$\xi$	0.62276	0.02276	0.11333	0.00555
	OLS	$\alpha$	1.79951	-0.20049	0.47176	0.02135
		$\delta$	0.1025	0.0025	0.02518	0.00125
		$\xi$	0.60708	0.00708	0.16722	0.00835
	WLS	$\alpha$	1.93021	-0.06979	0.46879	0.02318
		$\delta$	0.10217	0.00217	0.02378	0.00118
		$\xi$	0.60841	0.00841	0.15692	0.00783

	CVM	$\alpha$	1.93732	-0.06268	0.49305	0.02445
		$\delta$	0.1028	0.0028	0.02438	0.00121
		$\xi$	0.63214	0.03214	0.18843	0.00928
30	MLE	$\alpha$	2.06355	0.06355	0.33988	0.01113
		$\delta$	0.10236	0.00236	0.01921	0.00064
		$\xi$	0.61622	0.01622	0.09403	0.00309
	OLS	$\alpha$	1.85637	-0.14363	0.38631	0.01195
		$\delta$	0.10256	0.00256	0.01986	0.00066
		$\xi$	0.5982	-0.0018	0.13068	0.00436
	WLS	$\alpha$	1.95884	-0.04116	0.34949	0.01157
		$\delta$	0.10169	0.00169	0.01976	0.00066
		$\xi$	0.60498	0.00498	0.1212	0.00404
	CVM	$\alpha$	1.95301	-0.04699	0.37994	0.01257
		$\delta$	0.10213	0.00213	0.02026	0.00067
		$\xi$	0.62035	0.02035	0.14444	0.00477
50	MLE	$\alpha$	2.03754	0.03754	0.24508	0.00484
		$\delta$	0.102	0.002	0.01433	0.00028
		$\xi$	0.60994	0.00994	0.07152	0.00142
	OLS	$\alpha$	1.92042	-0.07958	0.29549	0.00569
		$\delta$	0.10064	0.00064	0.01506	0.0003
		$\xi$	0.60653	0.00653	0.10356	0.00207
	WLS	$\alpha$	1.99167	-0.00833	0.2691	0.00538
		$\delta$	0.10059	0.00059	0.01477	0.0003
		$\xi$	0.60719	0.00719	0.09	0.00179
	CVM	$\alpha$	1.98367	-0.01633	0.28912	0.00577
		$\delta$	0.10095	0.00095	0.01499	0.0003
		$\xi$	0.61395	0.01395	0.10591	0.0021

جدول (3) يوضح متوسط التقديرات ومعايير الجودة لمعاملات توزيع (OLLFr) عند أحجام العينات المختلفة وقيم الافتراضية للمعاملات III

(III: $\alpha = 2, \delta = 2, \xi = 3$ )						
n	Methods		ME	Bias	RMSE	S. E
10	MLE	$\alpha$	2.1497	0.1497	0.64183	0.06241
		$\delta$	2.00744	0.00744	0.12909	0.01289
		$\xi$	3.20408	0.20408	0.86248	0.0838
	OLS	$\alpha$	1.63128	-0.36872	0.67863	0.05697
		$\delta$	2.0101	0.0101	0.13885	0.01385
		$\xi$	3.03158	0.03158	1.46826	0.14679
	WLS	$\alpha$	1.81008	-0.18992	0.71131	0.06855
		$\delta$	2.00914	0.00914	0.13757	0.01373
		$\xi$	3.02324	0.02324	1.38689	0.13867
	CVM	$\alpha$	1.89928	-0.10072	0.70472	0.06975
		$\delta$	2.01313	0.01313	0.1387	0.01381
		$\xi$	3.30668	0.30668	1.99118	0.19674
15	MLE	$\alpha$	2.10153	0.10153	0.50465	0.03296
		$\delta$	2.00308	0.00308	0.10326	0.00688
		$\xi$	3.14403	0.14403	0.69296	0.04519
	OLS	$\alpha$	1.74203	-0.25797	0.56416	0.03345
		$\delta$	1.99942	-0.00058	0.10867	0.00724
		$\xi$	3.06517	0.06517	1.02717	0.06834
	WLS	$\alpha$	1.89372	-0.10628	0.53574	0.03501
		$\delta$	1.99876	-0.00124	0.10727	0.00715
		$\xi$	3.04227	0.04227	0.89388	0.05953
	CVM	$\alpha$	1.93359	-0.06641	0.57849	0.03831
		$\delta$	2.00146	0.00146	0.10853	0.00723
		$\xi$	3.22005	0.22005	1.12216	0.07336
20	MLE	$\alpha$	2.07727	0.07727	0.41415	0.02034
		$\delta$	2.00491	0.00491	0.08432	0.00421
		$\xi$	3.10325	0.10325	0.58317	0.0287
	OLS	$\alpha$	1.79927	-0.20073	0.48517	0.02209
		$\delta$	2.00287	0.00287	0.09001	0.0045
		$\xi$	3.00186	0.00186	0.81252	0.04063
	WLS	$\alpha$	1.92518	-0.07482	0.45506	0.02244
		$\delta$	2.00213	0.00213	0.08808	0.0044
		$\xi$	3.00072	0.00072	0.73114	0.03656

	CVM	$\alpha$	1.9442	-0.0558	0.49258	0.02447
		$\delta$	2.0044	0.0044	0.08988	0.00449
		$\xi$	3.11434	0.11434	0.87254	0.04325
30	MLE	$\alpha$	2.03698	0.03698	0.34698	0.0115
		$\delta$	2.00466	0.00466	0.06908	0.0023
		$\xi$	3.0495	0.0495	0.48818	0.01619
	OLS	$\alpha$	1.85639	-0.14361	0.38627	0.01195
		$\delta$	2.00435	0.00435	0.0762	0.00254
		$\xi$	2.991	-0.009	0.65338	0.02178
	WLS	$\alpha$	1.95718	-0.04282	0.35401	0.01171
		$\delta$	2.00414	0.00414	0.07497	0.0025
		$\xi$	2.98951	-0.01049	0.57849	0.01928
	CVM	$\alpha$	1.95568	-0.04432	0.38525	0.01276
		$\delta$	2.00541	0.00541	0.07621	0.00253
		$\xi$	3.06445	0.06445	0.68481	0.02273
50	MLE	$\alpha$	2.02119	0.02119	0.27414	0.00547
		$\delta$	2.00032	0.00032	0.05717	0.00114
		$\xi$	3.03209	0.03209	0.37937	0.00756
	OLS	$\alpha$	1.90787	-0.09213	0.28114	0.00531
		$\delta$	1.99794	-0.00206	0.05815	0.00116
		$\xi$	3.02585	0.02585	0.49493	0.00989
	WLS	$\alpha$	1.47601	-0.02399	0.26146	0.00521
		$\delta$	1.99791	-0.00209	0.05727	0.00114
		$\xi$	3.02338	0.02338	0.43127	0.00861
	CVM	$\alpha$	1.97515	-0.02485	0.2907	0.00579
		$\delta$	1.99944	-0.00056	0.06003	0.0012
		$\xi$	3.07222	0.07222	0.53224	0.01055

---

---

## Estimating parameters of a generalized Fréchet distribution using some different estimation methods (Applied study)

*Mennah Hussein El-Dreig; Dr. Mohamed Abu-Raya and*

*Dr. Mohamed Ibrahim Mohamed*

### **Abstract:**

This study aims to introduce a new generalization of Fréchet distribution (Fr) that can fit the data of many life phenomena with higher accuracy compared with Fréchet generalizations.

This study aims to present a new generalization for Fréchet distribution (Fr) through using Odd log-logistic family of distributions (OLL), to generate a new distribution referred to as Odd log-logistic Fréchet (OLLFr), Also, some of statistical characteristics of the new generalization were studied and distribution parameters were estimated by using four different estimation methods which are Maximum Likelihood, Ordinary Least squares, Weighted Least Squares and Cramer-von-Mises Methods. and a simulation study was conducted to evaluate the performance of the estimators.

Moreover, two sets of real data were used in the study, The first data consists of survival times for guinea pigs injected with different doses of tubercle bacilli. These data have been used in many studies of the Fréchet distribution. The second set of data consists of a group of data includes 59 views of some deaths from all age groups of liver patients who died while they were subject to the treatment protocol, the data was obtained from Damietta Cardiology and Gastroenterology Center\_ and cover the period ranges from 1/1/2019 to 1/1/2020 to show the flexibility of the new generalization compared with some other generalizations of the Fréchet distribution, using some statistical measures.

### **Keywords:**

Fréchet distribution - odd log-logistic family - Ordinary Moments - Incomplete Moments - Order statistics - Maximum Likelihood Method - Ordinary Least squares Method - Weighted Least Squares - Cramer-von-Mises Method – Lifetime data.