



تحسين جودة المطابقة لبعض بيانات الحياة باستخدام توزيع

ألفا لوماكس اللوغاريتمي المحول

بحث مُستل من رسالة ماجستير في الإحصاء

إعداد

أ.هاجر ربيع صابر حجازي
معيد بقسم الإحصاء التطبيقي والرياضي
والاكتواري
كلية التجارة- جامعة دمياط

د. محمد إبراهيم محمد
أستاذ الإحصاء الرياضي المساعد
كلية التجارة- جامعة دمياط

د. أمال السيد مبارك
أستاذ الإحصاء التطبيقي المساعد
كلية التجارة- جامعة دمياط
المجلة العلمية للدراسات والبحوث المالية والتجارية
كلية التجارة – جامعة دمياط

المجلد الرابع - العدد الأول - الجزء الرابع - يناير ٢٠٢٣

التوثيق المقترح وفقاً لنظام APA:

حجازي، هاجر ربيع صابر؛ محمد، محمد إبراهيم؛ مبارك، أمال السيد؛ (٢٠٢٣). تحسين جودة المطابقة لبعض بيانات الحياة باستخدام توزيع ألفا لوماكس اللوغاريتمي المحول. *المجلة العلمية للدراسات والبحوث المالية والتجارية*، كلية التجارة، جامعة دمياط، ٤(١)، ٤٠٩-٥٧٥.

رابط المجلة: <https://cfdj.journals.ekb.eg/>

تحسين جودة المطابقة لبعض بيانات الحياة باستخدام توزيع ألفا لوماكس اللوغاريتمي المحول

أ. هاجر ربيع صابر حجازي؛ د. محمد إبراهيم محمد؛ د. أمال السيد مبارك

ملخص:

تهدف الدراسة إلى الحصول على تعميم جديد لتوزيع لوماكس (Lx) Lomax distribution ليكون له القدرة في توفيق العديد من الظواهر الحياتية وبصورة خاصة بيانات الحياة Life time data بدقة أعلى مقارنة بتعميمات لوماكس الأخرى.

تم في هذه الدراسة استخدام α Logarithmic Transformed Family of Distributions عائلة ألفا لوغاريتمي المحول " لتقديم تعميم جديد لتوزيع لوماكس (Lx) يسمى " توزيع ألفا لوماكس اللوغاريتمي المحول " (ALTLx)، كما تم الحصول على بعض الخصائص الإحصائية للتعميم الجديد (ALTLx) مثل دالة الكوانتيل والعزوم التقليدية والعزوم غير الكاملة و Rényi Entropy والإحصاءات الترتيبية. كما تم إثبات أن دالة الكثافة الاحتمالية للتعميم الجديد يمكن التعبير عنها كدالة خطية في دالة الكثافة لتوزيع لوماكس. وأيضاً تم تقدير معالم التوزيع من خلال استخدام أربع طرق تقدير مختلفة وهي طريقة الإمكان الأعظم، طريقة المربعات الصغرى، طريقة المربعات الصغرى المرجحة واخيراً طريقة كرامير وفان ميسس كما تم تقديم دراسة محاكاة لتقييم أداء المقدرات المختلفة وكانت نتائج دراسة المحاكاة تشير إلى أن طريقة الإمكان الأعظم هي الأفضل في التقدير عن باقي الطرق المستخدمة لأحجام العينات المختلفة.

ولقد تم دراسة مجموعتين من البيانات فالمجموعة الأولى من البيانات تشمل 34 مشاهدة لبيانات كلوريد الفينيل (Vinyl chloride) التي تم الحصول عليها من خلال مراقبة تنظيف آبار المياه الجوفية، حيث تم استخدام هذه البيانات في العديد من الدراسات الخاصة بتوزيع لوماكس، والمجموعة الثانية عبارة عن مجموعة من البيانات الخاصة بأوقات الفشل (الوفاة) لعينة عشوائية مكونة من 60 مريضاً يعانون من التهاب رئوي مزدوج وأيضاً مصابون بالكورونا COVID-19 وهذه البيانات وفقاً لمستشفى الصدر بدمياط وهذا في الفترة من 2020/6/2 إلى 2020/9/19 لتوضيح مدى مرونة التعميم الجديد مقارنة ببعض التعميمات الأخرى لتوزيع لوماكس حيث أكدت النتائج أفضلية التعميم الجديد وذلك من خلال استخدام بعض المقاييس الإحصائية مثل اختبار كولمغوروف-سميرنوف Kolmogorov-Smirnov test (K.S) واختبار Anderson-Darling ومقياس Akaike Information Criterion (AIC) ومقياس Consistent Akaike Information Criterion (CAIC) ومقياس Bayesian Information Criterion (BIC) ومقياس Hannan-Quinn Information Criterion (HQIC).

الكلمات المفتاحية:

توزيع لوماكس – عائلة ألفا لوغاريتمي المحول – العزوم التقليدية – العزوم غير الكاملة – الإحصاءات الترتيبية – طريقة الإمكان الأعظم – طريقة المربعات الصغرى – طريقة المربعات الصغرى المرجحة – كرامير وفان ميسس – بيانات البقاء.

(١) مقدمة

يعد توزيع Lomax الذي تم تقديمه عام (1954) والذي يسمى أيضاً بتوزيع باريتو للنوع الثاني واحداً من أهم التوزيعات والذي له تطبيقات متعددة في مجالات مختلفة خاصة في مجالات اختبارات الحياة Life Testing والمستخدم في الهندسة والعلوم الاكتوارية والعلوم الطبية والبيولوجية وأوقات الحياة ونماذج الموثوقية. حيث استخدم Harris (1968) توزيع لوماكس على اختبارات الحياة والموثوقية، واستخدم Atkinson & Harrison (1978) التوزيع على بيانات الثروة والدخل، وقام Holland et al., (2006) بتطبيق التوزيع على بيانات العلوم البيولوجية، كما قام Corbelini et al., (2009) باستخدام هذا التوزيع على بيانات حجم الشركة ومشاكل الانتظار، وأشار AI-Ghamdi et al., (2009) الى استخدام التوزيع على بيانات الموثوقية ونماذج اختبارات الحياة. كما يعتبر توزيع لوماكس أحد نماذج العمر المهمة التي يمكن أن تستخدم في العلوم الاكتوارية والاقتصادية حيث تم استخدامه بواسطة McKenzie et al. (2011) على قواعد البيانات الجيوفيزيائية لأحجام حرائق الاراضي في ولاية كاليفورنيا بالولايات المتحدة الأمريكية.

ولقد تم اقتراح العديد من الامتدادات لتوزيع لوماكس لزيادة قدرته على ملائمة بيانات أوقات البقاء lifetime المختلفة وغيرها من البيانات. وفي هذا المجال نجد توزيع لوماكس الأسّي المقدم بواسطة Ashour & Eltehiwy (2013)، وايضا توزيع واييل-لوماكس المقدم بواسطة Tahir et al., (2015)، وتوزيع جاما-لوماكس المقدم بواسطة Cordeiro et al., (2015)، وتوزيع واييل-لوماكس المحول المقدم بواسطة Afify et al., (2015)، وأيضاً توزيع لوماكس المرجح المقدم بواسطة Kilany (2016) كما قدم Abo-Raya (2019) توزيع لوماكس بيرر الأسّي Burr X (exponentiated Lomax) وغيرهم من الامتدادات الأخرى.

يأخذ هذا البحث بالنهج الذي قدمه Pappas et al., (2012) لتوليد توزيعات باستخدام عائلة α Logarithmic Transformed Family of Distributions (αLT) حيث تكون دالة التوزيع التراكمي ودالة كثافة الاحتمال للعائلة على الشكل التالي:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{\log[\alpha - (\alpha - 1)G(x)]}{\log(\alpha)} & \text{if } \alpha > 0, \alpha \neq 1 \\ G(x) & \text{if } \alpha = 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(\alpha - 1)g(x)}{\log(\alpha)[\alpha - (\alpha - 1)G(x)]} & \text{if } \alpha > 0, \alpha \neq 1 \\ g(x) & \text{if } \alpha = 1 \end{cases} \quad (2)$$

وتكون دالة معدل الخطر للعائلة (αLT) على الشكل التالي:

$$h(x) = \frac{(\alpha - 1)(\alpha - (\alpha - 1)G(x))^{-1}}{\log(\alpha) - \log(\alpha - (\alpha - 1)G(x))}, \alpha > 0, \alpha \neq 1 \quad (3)$$

حيث تمثل $G(x)$ دالة التوزيع التراكمية للتوزيع المراد استخدامه في عمل امتداد جديد لهذه العائلة (توزيع لوماكس) وتمثل $g(x) = dG(x)/dx$

ويهدف هذا البحث إلى اشتقاق توزيع جديد يسمى "توزيع ألفا لوماكس اللوغاريتمي المحول" ($ALTLx$) ويعتبر أحد التعميمات الجديدة الخاصة بتوزيع لوماكس وذلك من خلال عائلة "ألفا لوجاريتمي المحول".

توزيع ألفا لوماكس اللوغاريتمي المحول ($ALTLx$)

تأخذ دالة التوزيع التراكمية cdf ودالة الكثافة الاحتمالية pdf الخاصة بتوزيع لوماكس بمعلمة شكل "shape" θ ومعلمة قياس "Scale" λ الشكل التالي (على الترتيب):

$$G(x; \lambda, \theta) = 1 - (1 + \lambda x)^{-\theta} \quad ; x > 0, \lambda, \theta > 0 \quad (4)$$

$$g(x; \lambda, \theta) = \lambda \theta (1 + \lambda x)^{-(\theta+1)} \quad ; x > 0, \lambda, \theta > 0 \quad (5)$$

من خلال التعويض بالمعادلات (4) و (5) في المعادلات (1) و (2) سوف نحصل على دالة الكثافة الاحتمالية pdf ودالة التوزيع التراكمي cdf على الشكل التالي:

$$F(x) = 1 - \frac{\log[\alpha - (\alpha - 1)(1 - (1 + \lambda x)^{-\theta})]}{\log \alpha} \quad (6)$$

حيث أن: $\alpha > 0, \alpha \neq 1, \lambda, \theta > 0, x > 0$

$$f(x) = \frac{(\alpha - 1)\lambda\theta(1 + \lambda x)^{-(\theta+1)}}{\log \alpha [\alpha - (\alpha - 1)(1 - (1 + \lambda x)^{-\theta})]} \quad (7)$$

حيث أن: $\alpha > 0, \alpha \neq 1, \lambda, \theta > 0, x > 0$

حيث تمثل α معلمة شكل (Shape parameter)، وتمثل كلا من (λ, θ) معاملات قياس (Scale parameters)، حيث يتبع المتغير العشوائي X في هذه الحالة توزيع ألفا لوماكس اللوغاريتمي المحول $[X \sim ALTLx(\lambda, \alpha, \theta)]$.

وتكون دالة البقاء Survival function $S(x)$ لتوزيع ($ALTLx$) على الشكل التالي:

$$S(x) = \frac{\log[\alpha - (\alpha - 1)(1 - (1 + \lambda x)^{-\theta})]}{\log \alpha}$$

كما تأخذ كل من دالة Hazard rate function $h(x)$ ودالة Cumulative hazard rate function $H(x)$ لتوزيع (ALTLx) الشكل التالي (على الترتيب):

$$h(x) = \frac{(\alpha-1)[\alpha-(\alpha-1)(1-(1+\lambda x)^{-\theta})]^{-1}}{\log \alpha - \log[\alpha-(\alpha-1)(1-(1+\lambda x)^{-\theta})]}$$

$$H(x) = -\ln \frac{\log[\alpha-(\alpha-1)(1-(1+\lambda x)^{-\theta})]}{\log \alpha}$$

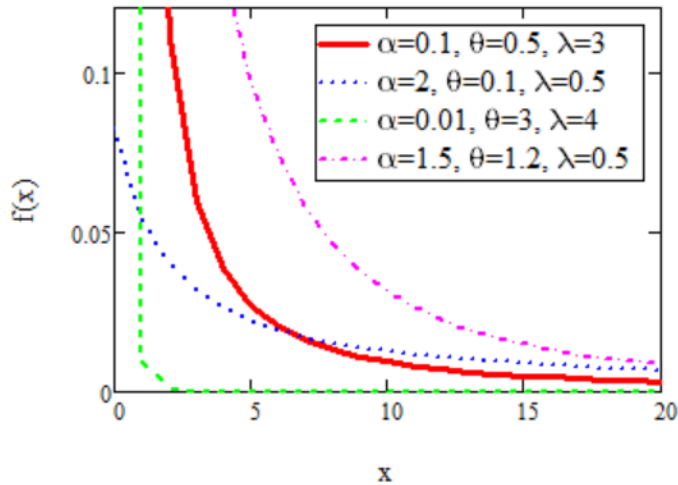
وتأخذ دالة الخطر العكسية Reversed hazard rate function $R(x)$ لتوزيع (ALTLx) الشكل التالي:

$$R(x) = \frac{(\alpha-1)\lambda\theta(1+\lambda x)^{-(\theta+1)}}{[\alpha-(\alpha-1)(1-(1+\lambda x)^{-\theta})] \log \left[\frac{\alpha}{\alpha-(\alpha-1)(1-(1+\lambda x)^{-\theta})} \right]}$$

كما تأخذ دالة Odds function $O(x)$ لتوزيع (ALTLx) الشكل التالي:

$$O(x) = \frac{\log \alpha}{\log[\alpha-(\alpha-1)(1-(1+\lambda x)^{-\theta})]}$$

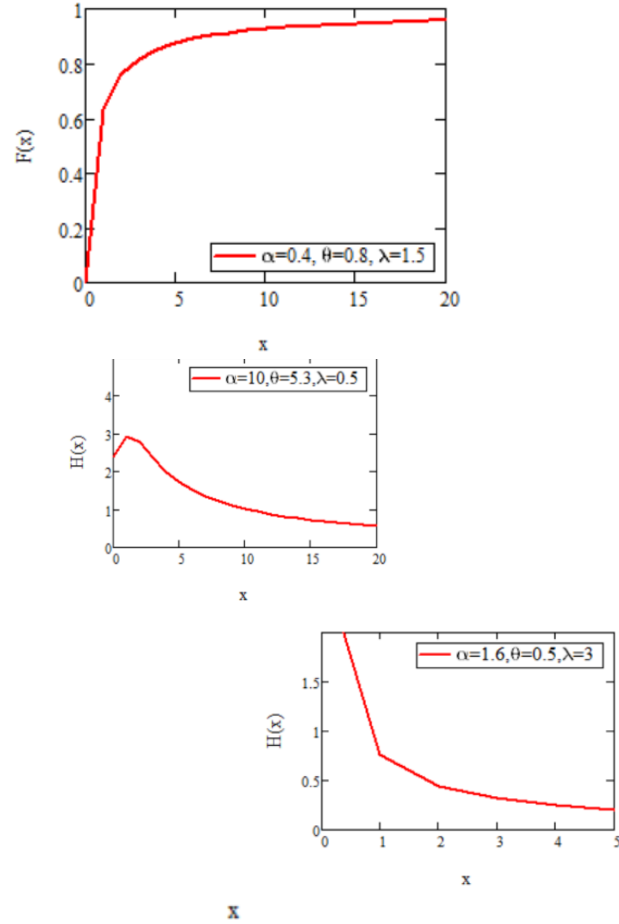
ويوضح شكل (1) بعض الأشكال الممكنة لدالة كثافة الاحتمال عند قيم مختلفة للمعالم وشكل (٢) يعرض دالة التوزيع التراكمية لتوزيع (ALTLx)، كما يوضح شكل (3) بعض الأشكال لدالة الخطر Hazard Function لتوزيع (ALTLx) عند قيم مختلفة للمعالم.



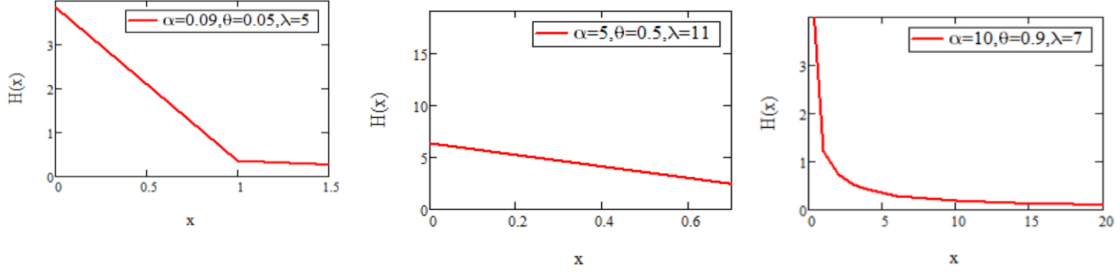
شكل (1): دالة pdf لتوزيع (ALTLx) عند قيم مختلفة للمعالم

المجلة العلمية للدراسات والبحوث المالية والتجارية (م، ٤، ع، ١، ج، ٤، يناير ٢٠٢٣)

أ. هاجر ربيع صابر حجازي؛ د. محمد إبراهيم محمد؛ د. أمال السيد مبارك



شكل (2): دالة cdf لتوزيع (ALTLx) عند قيم مختلفة للمعالم



شكل (3): بعض الأشكال الممكنة لدالة Hazard Function لتوزيع (ALTLx) عند قيم مختلفة للمعالم

هذه أشكال لتوليفات من ثلاثة معالم فيظهر معدل الخطر بأنه يأخذ أشكال مختلفة من bathtub وهذا يجعل من دالة معدل الخطر مفيدة ومناسبة في حالة سلوك دوال الخطر التجريبية الغير منتظمة non monotone empirical behaviors والتي من المرجح أن تتم مواجهتها أو مشاهدتها في مواقف الحياة الواقعية.

(٢) التمثيل الخطي لدالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع (ALTLx)

عند إجراء بعض عمليات التبسيط لدالة الكثافة الخطية لعائلة ألفا لوغاريتمي المحول معادلة (٢) سوف نحصل على الشكل التالي:

$$f(x) = \frac{(\alpha - 1)g(x)}{(\alpha + 1) \log \alpha} \left(1 - \frac{1 + (\alpha - 1)G(x)}{(\alpha + 1)} \right)^{-1}$$

وباستخدام توسيع ماكلورين (Maclaurine expansion) تكون الدالة على الصورة التالية:

$$f(x) = \frac{(\alpha - 1)g(x)}{(\alpha + 1) \log \alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha + 1)^{-k} (1 + (\alpha - 1)G(x))^k$$

حيث توسيع ماكلورين على الصورة يكون على الشكل التالي:

$$(1 - z)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

$$z = \frac{1 + (\alpha - 1)G(x)}{(\alpha + 1)} \quad \text{حيث}$$

وبتطبيق توسيع ذات الحدين نحصل على الصورة الأخرى لدالة الكثافة لهذه العائلة:

$$f(x) = \frac{g(x)}{\log \alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{(\alpha - 1)^{j+1}}{(\alpha + 1)^{k+1}} G(x)^j$$

والتي يمكن كتابتها كذلك على الصورة التالية:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k w_{k,j} g(x) G(x)^j$$

حيث

$$w_{k,j} = \binom{k}{j} \frac{(\alpha - 1)^{j+1}}{\log \alpha (\alpha + 1)^{k+1}}$$

وبالتالي يمكن إجراء عملية التوسيع للتوزيع المعمم الجديد (ALTLx) حيث:

$$g(x)G(x)^j = \lambda \theta (1 + \lambda x)^{-(\theta+1)} [1 - (1 + \lambda x)^{-\theta}]^j$$

وباستخدام توسيع ذات الحدين وإجراء بعض عمليات التبسيط نحصل على التالي:

$$g(x).G(x)^j = \frac{\lambda}{(s+1)} \theta (s+1) \sum_{s=0}^j \binom{j}{s} (-1)^s (1 + \lambda x)^{-[\theta(s+1)+1]}$$

حيث $(x \sim m(\theta(s+1), \lambda))$.

وبالتالي يمكننا الحصول على دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع (ALTLx) كالتالي:

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k w_{k,j} \sum_{s=0}^j \binom{j}{s} \frac{(-1)^s}{(s+1)} \lambda \theta (s+1) (1 + \lambda x)^{-[\theta(s+1)+1]} \quad (8)$$

ويمكن كتابتها أيضا على الصورة التالي:

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \sum_{s=0}^j W_{k,j,s} m(x; \theta(s+1), \lambda) \quad (9)$$

حيث

$$W_{k,j,s} = \binom{k}{j} \binom{j}{s} \frac{(-1)^s}{(s+1)} \frac{(\alpha - 1)^{j+1}}{\log \alpha (\alpha + 1)^{k+1}}$$

حيث أن في المعادلة (9) $m[x; \theta(s+1), \lambda]$ تعبر عن دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع لوماكس Lomax بمعلمة مقياس $\theta(s+1)$ ومعلمة شكل λ .

ومن خلال تكامل المعادلة (9) نحصل على دالة التوزيع التجميعية لتوزيع (ALTLX) وتأخذ الصورة التالية:

$$G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \sum_{s=0}^j W_{k,j,s} M(x; \theta(s+1), \lambda)$$

حيث أن $M[x; \theta(s+1), \lambda]$ تعبر عن دالة التوزيع التراكمية لتوزيع لوماكس Lomax بمعلمة مقياس $\theta(s+1)$ ومعلمة شكل λ .

(٣) بعض الخصائص الإحصائية لتوزيع (ALTLX)

سوف يتم الحصول على بعض الخصائص الإحصائية لتوزيع (ALTLX) في هذا الجزء مثل دالة الكوانتيل والعزوم التقليدية والعزوم غير الكاملة وغيرها من الخصائص.

(1-4) دالة الكوانتيل

يمكننا الحصول على دالة الكوانتيل لمتغير عشوائي x الذي يتبع توزيع (ALTLX) من خلال إيجاد معكوس الدالة (7) وتكون الدالة على الشكل التالي:

$$x_u = \frac{1}{\lambda} \left[\left(1 - \frac{\alpha - \alpha^{1-u}}{\alpha - 1} \right)^{-\frac{1}{\theta}} - 1 \right] \quad (10)$$

كما يمكننا من خلال المعادلة السابقة الحصول بسهولة على محاكاة أي متغير عشوائي يتبع توزيع (ALTLX)، ويمكن الحصول على الوسيط من خلال التعويض ($u=0.5$) في المعادلة (10).

(2-4) العزوم التقليدية

يمكن الحصول على العزم الخام الرائي r th moment لتوزيع (ALTLX) كما يلي:

$$\begin{aligned} \mu'_r &= \int_0^{\infty} x^r \frac{(\alpha-1)\lambda\theta(1+\lambda x)^{-(\theta+1)}}{\log\alpha[\alpha-(\alpha-1)(1-(1+\lambda x)^{-\theta})]} dx \\ &= \frac{(\alpha-1)\lambda\theta}{\log\alpha} \int_0^{\infty} x^r \frac{(1+\lambda x)^{-(\theta+1)}}{[\alpha-(\alpha-1)(1-(1+\lambda x)^{-\theta})]} dx \\ &= \frac{(\alpha-1)\lambda\theta}{\log\alpha} \int_0^{\infty} x^r \frac{(1+\lambda x)^{-(\theta+1)}}{[1+(\alpha-1)(1+\lambda x)^{-\theta}]} dx \end{aligned}$$

وباستخدام توسيع $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x)^n$ حيث $x = (\alpha-1)(1+\lambda x)^{-\theta}$ وبإجراء بعض عمليات التبسيط تكون دالة العزوم لتوزيع (ALTLX) على الشكل التالي:

$$\mu'_r = \frac{(\alpha - 1)\theta}{\log \alpha \lambda^r} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\alpha - 1)^n \beta(r + 1, (n + 1)\theta - r) \quad (11)$$

ويمكن كتابتها بالشكل التالي:

$$\mu'_r = \frac{(\alpha - 1)\theta}{\log \alpha \lambda^r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\alpha - 1)^n \Gamma(r + 1) \Gamma((n + 1)\theta - r)}{\Gamma((n + 1)\theta + 1)}$$

ويمكن الحصول على العزوم الأربعة الأولى عن طريق وضع (r=1,2,3,4)، كما يمكننا الحصول على التباين من خلال العلاقة التالية:

$$V(X) = \mu'_2 - (\mu'_1)^2$$

كما يمكننا الحصول على مقاييس الالتواء والتفرطح باستخدام العلاقات التالية:

$$Skew(X) = \frac{\mu'_3 - 3\mu'_1\sigma^2 - (\mu'_1)^3}{\sigma^3}$$

$$kurt(X) = \frac{\mu'_4 - 4\mu'_1\mu'_3 + 6(\mu'_1)^2\sigma^2 + 3(\mu'_1)^4}{\sigma^4}$$

(3-4) العزوم غير الكاملة

تكون العزوم غير الكاملة $\varphi_r(t)$ على الشكل التالي:

$$\varphi_r(t) = \int_0^t x^s g(x) dx.$$

ونحصل على العزوم غير الكاملة لتوزيع (ALTLx) كالتالي:

$$\varphi_r(t) = \int_0^t x^s \frac{(\alpha - 1)\lambda\theta(1 + \lambda x)^{-(\theta+1)}}{\log \alpha [\alpha - (\alpha - 1)(1 - (1 + \lambda x)^{-\theta})]} dx$$

ومن خلال اجراء بعض العمليات الحسابية نحصل على العزوم غير الكاملة من الدرجة s للمتغير x على الشكل التالي:

$$\varphi_s(t) = \frac{(\alpha - 1)\theta}{\lambda^s \log \alpha} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\alpha - 1)^n \left[\beta(s + 1, ((n + 1)\theta - s) - \beta\left(\frac{1}{1 + \lambda t}; s + 1, ((n + 1)\theta - s) \right) \right] \quad (12)$$

وعند التعويض عن (s=1) في المعادلة (12) ينتج العزم غير الكامل الأول للمتغير x، حيث يرمز له بالرمز $\varphi_1(t)$ ويشير التطبيق الأساسي لهذا العزم في إيجاد منحنيات Lorenz و Bonferroni، ومنحنى Lorenz يمكن حسابه عن طريق المعادلة التالية:

$$L_f(t) = \frac{1}{\mu'_1} \varphi_1(t)$$

كما يمكن حساب منحني Bonferroni من خلال المعادلة التالية:

$$B_f(t) = \frac{L_f(t)}{\mu'_1}$$

Rényi Entropy (4-4)

يأخذ Rényi Entropy الخاص بتوزيع (ALTLx) الصورة التالية:

$$I_X(\sigma) = \frac{1}{1-\sigma} \log \left[\frac{(\alpha-1)\lambda\theta}{\log(\alpha)} \right]^\sigma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(\sigma+n)(\alpha-1)^n}{\lambda \Gamma(\sigma) n! ((\sigma+n)\theta + \sigma - 1)} \quad (13)$$

(5-4) الإحصاءات الترتيبية

تأخذ دالة الكثافة الاحتمالية pdf للإحصاء الترتيبي $X_{i:n}$ حيث $i = 1, 2, \dots, n$ للمتغيرات العشوائية المستقلة والمتماثلة $X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n}$ والتي تتبع توزيع (ALTLx) الشكل التالي:

$$f_{i:x}(x) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} \frac{(\alpha-1)\lambda\theta(1+\lambda x)^{-(\theta+1)}}{\log \alpha [\alpha - (\alpha-1)(1 - (1+\lambda x)^{-\theta})]} \left[1 - \frac{\log [\alpha - (\alpha-1)(1 - (1+\lambda x)^{-\theta})]}{\log \alpha} \right]^{i-1} \left[\frac{\log [\alpha - (\alpha-1)(1 - (1+\lambda x)^{-\theta})]}{\log \alpha} \right]^{n-i} \quad (14)$$

حيث $0 < x < \infty$.

كما يمكن أن نحصل على صورة أخرى لدالة الكثافة الاحتمالية للإحصاء الترتيبي:

$$f_{i:n}(x) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} \frac{(\alpha-1)\lambda\theta(1+\lambda x)^{-(\theta+1)}}{\log \alpha [\alpha - (\alpha-1)(1 - (1+\lambda x)^{-\theta})]} \sum_{r=0}^{n-i} (-1)^r \binom{n-i}{r} \left[1 - \frac{\log [\alpha - (\alpha-1)(1 - (1+\lambda x)^{-\theta})]}{\log \alpha} \right]^{i+r-1} \quad (15)$$

وبالتالي

$$g_{i:n}(x) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} \frac{(\alpha-1)\lambda\theta}{\log\alpha} \sum_{r=0}^{n-i} (-1)^r \binom{n-i}{r} \left[\frac{(1+\lambda x)^{-(\theta+1)}}{[1+(\alpha-1)(1+\lambda x)^{-\theta}]} \right] \left[1 - \frac{\log[1+(\alpha-1)(1+\lambda x)^{-\theta}]}{\log\alpha} \right]^{i+r-1}$$

وباستخدام توسيع ذات الحدين المعمم حيث $(1-z)^{b-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{b-1}{k} z^k$ نحصل على $z = \frac{\log[1+(\alpha-1)(1+\lambda x)^{-\theta}]}{\log\alpha}$

$$f_{i:n}(x) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} \frac{(\alpha-1)\lambda\theta}{\log(\alpha)} \sum_{r=0}^{n-i} (-1)^r \binom{n-i}{r} \times \left[\frac{(1+\lambda x)^{-(\theta+1)}}{[1+(\alpha-1)(1+\lambda x)^{-\theta}]} \right]^{i+r-1} \sum_{k=0}^{i+r-1} \binom{i+r-1}{k} (-1)^k \frac{1}{(\log\alpha)^k} (\log[1+(\alpha-1)(1+\lambda x)^{-\theta}])^k$$

وباستخدام توسيع $\frac{1}{1+X} = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s X^s$ حيث $X = 1 + (\alpha-1)(1+\lambda x)^{-\theta}$ وبعض عمليات التبسيط نحصل على

$$f_{i:n}(x) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} \frac{(\alpha-1)\lambda\theta}{\log(\alpha)} \sum_{r=0}^{n-i} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{i+r-1} A_{n,i,r}^{\alpha,\lambda,\theta}(x) \quad (16)$$

حيث

$$A_{n,i,r}^{\alpha,\lambda,\theta}(x) = (-1)^{r+s+k} \binom{n-i}{r} \binom{i+r-1}{k} \frac{(\alpha-1)^s}{(\log\alpha)^k} (1 + \lambda x)^{-((s+1)\theta+1)} (\log[1+(\alpha-1)(1+\lambda x)^{-\theta}])^k$$

وعند وضع $i=1$ في المعادلة (16) نحصل على أصغر إحصاء ترتيبى ويكون على الشكل التالي:

$$f_{1:n}(x) = \frac{n!}{(0)!(n-1)!} \frac{(\alpha-1)\lambda\theta}{\log(\alpha)} \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k=0}^r A_{n,1,r}^{\alpha,\lambda,\theta}(x) = \frac{(\alpha-1)n\lambda\theta}{\log(\alpha)} \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k=0}^r A_{n,1,r}^{\alpha,\lambda,\theta}(x)$$

حيث

$$A_{n,1,r}^{\alpha,\lambda,\theta}(x) = (-1)^{r+s+k} \binom{n-1}{r} \binom{r}{k} \frac{(\alpha-1)^s}{(\log \alpha)^k} (1 + \lambda x)^{-((s+1)\theta+1)} (\log[1 + (\alpha-1)(1 + \lambda x)^{-\theta}])^k$$

وأيضا عند وضع $i=n$ في المعادلة (16) سوف نحصل على أكبر إحصاء ترتيبى ويأخذ الشكل التالي:

$$g_{n:n}(x) = \frac{n!}{(n-1)!(n-n)!} \frac{(\alpha-1)\lambda\theta}{\log(\alpha)} \sum_{r=0}^{n-n} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n+r-1} A_{n,n,r}^{\alpha,\lambda,\theta}(x)$$

$$= \frac{(\alpha-1)n\lambda\theta}{\log(\alpha)} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} A_{n,n,0}^{\alpha,\lambda,\theta}(x)$$

حيث

$$A_{n,n,0}^{\alpha,\lambda,\theta}(x) = (-1)^{s+k} \binom{n-1}{k} \frac{(\alpha-1)^s}{(\log \alpha)^k} (1 + \lambda x)^{-((s+1)\theta+1)} (\log[1 + (\alpha-1)(1 + \lambda x)^{-\theta}])^k$$

حيث أن $(r=0)$.

(٤) تقدير معلمات توزيع (ALTLx)

(1-5) مقدر الإمكان الأعظم (MLE) Maximum-likelihood estimator

في هذا الجزء تم الحصول على مقدرات معلمات توزيع (ALTLx) من خلال استخدام طريقة الإمكان الأعظم، بفرض أن X_1, X_2, \dots, X_n متغيرات عشوائية تتبع توزيع (ALTLx) بمعلمات مجهولة $\psi = (\alpha, \lambda, \theta)$ ، وبالتالي تكون دالة الإمكان اللوغاريتمية Log-Likelihood function $L(\psi)$ لدالة الكثافة الاحتمالية (6) على الشكل التالي:

$$L(\psi) = n \log(\alpha - 1) + n \log \lambda + n \log \theta - n \log(\log(\alpha)) - (\theta + 1) \sum_{i=1}^n \log(1 + \lambda x_i) - \sum_{i=1}^n \log[\alpha - (\alpha - 1)(1 + \lambda x_i)^{-\theta}] \quad (17)$$

يمكن إيجاد مقدرات الإمكان الأعظم من خلال إجراء التفاضل الجزئي الأول لكل معلمة من المعلمات ومساواة النواتج بالصفر.

ويأخذ التفاضل الجزئي للمعادلة (17) الصور التالية:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \alpha} &= \frac{n}{\alpha - 1} - \frac{n}{\alpha \log(\log(\alpha))} - \sum_{i=1}^n \frac{1 - (1 + \lambda x_i)^{-\theta}}{[\alpha - (\alpha - 1)(1 + \lambda x_i)^{-\theta}]}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - (\theta + 1) \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{1 + \lambda x_i} - \sum_{i=1}^n \frac{x_i \theta (\alpha - 1) (1 + \lambda x_i)^{-\theta - 1}}{[\alpha - (\alpha - 1)(1 + \lambda x_i)^{-\theta}]}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^n \log(1 + \lambda x_i) - \sum_{i=1}^n \frac{(\alpha - 1)(1 + \lambda x_i)^{-\theta} \log(1 + \lambda x_i)}{[\alpha - (\alpha - 1)(1 + \lambda x_i)^{-\theta}]}$$

ويمكن الحصول على تقديرات الإمكان الأعظم للمعالم المجهولة من خلال حل المعادلات التالية وتكون على الشكل:

$$\left(\frac{dL}{d\alpha} = 0, \quad \frac{dL}{d\lambda} = 0, \quad \frac{dL}{d\theta} = 0 \right)$$

(2-5) مقدر المربعات الصغرى (LS) Least Squares estimator

بفرض أن $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ متغيرات عشوائية لتوزيع $F(X_{i:n})$ ذو الحجم n وتشير إلى الإحصاءات الترتيبية المناظرة للعينة. ويمكن أن نحصل على مقدرات المربعات الصغرى عن طريق تدنية المعادلة التالية بالنسبة للمعالم المجهولة:

$$\begin{aligned}L(\alpha, \lambda, \theta) &= \sum_{i=1}^n \left[1 - \frac{1}{\log \alpha} \log \left[\alpha - (\alpha - 1) [1 - (1 + \lambda x_i)^{-\theta}] \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{i}{n + 1} \right]^2\end{aligned}\tag{18}$$

ويمكن إيجاد مقدرات المربعات الصغرى من خلال الحصول على التفاضل الجزئي الأول لكل معلمة من المعلمات ومساواة النواتج بصفر.

$$\frac{\partial LS}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^n \left[\frac{-2(1 - [1 - (1 + \lambda x_i)^{-\theta}])}{\log(\alpha) [\alpha - (\alpha - 1) [1 - (1 + \lambda x_i)^{-\theta}]]} + \frac{2}{\alpha (\log \alpha)^2} \log [\alpha - (\alpha - 1) [1 - (1 + \lambda x_i)^{-\theta}]] \right] \left[1 - \frac{1}{\log \alpha} \log [\alpha - (\alpha - 1) [1 - (1 + \lambda x_i)^{-\theta}]] - \frac{i}{n + 1} \right]$$

$$\frac{\partial LS}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^n \frac{2(\theta(\alpha - 1)x_i(1 + \lambda x_i)^{-(\theta+1)})}{\log(\alpha) [\alpha - (\alpha - 1)[1 - (1 + \lambda x_i)^{-\theta}]} \left[1 - \frac{1}{\log \alpha} \log [\alpha - (\alpha - 1)[1 - (1 + \lambda x_i)^{-\theta}]] - \frac{i}{n + 1} \right]$$

$$\frac{\partial LS}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^n \frac{2((\alpha - 1)(1 + \lambda x_i)^{-\theta} \log(1 + \lambda x_i))}{\log(\alpha) [\alpha - (\alpha - 1)[1 - (1 + \lambda x_i)^{-\theta}]} \left[1 - \frac{1}{\log \alpha} \log [\alpha - (\alpha - 1)[1 - (1 + \lambda x_i)^{-\theta}]] - \frac{i}{n + 1} \right]$$

يمكن الحصول على تقديرات المربعات الصغرى للمعالم المجهولة من خلال حل المعادلات التالية وتكون على الشكل:

$$\left(\frac{dLS}{d\alpha} = 0, \quad \frac{dLS}{d\lambda} = 0, \quad \frac{dLS}{d\theta} = 0 \right)$$

(3-5) مقدر المربعات الصغرى المرجحة (WLS) Weighted Least Squares estimator

قدم Swain et al. (1988) طريقة المربعات الصغرى المرجحة لتقدير معالم التوزيع، وللحصول على مقدرات المربعات الصغرى المرجحة عن طريق تدنية المعادلة التالية بالنسبة للمعالم المجهولة:

$$W(\alpha, \lambda, \theta) = \sum_{i=1}^n \frac{(n + 1)^2(n + 2)}{i(n - i - 1)} \left[1 - \frac{1}{\log \alpha} \log [\alpha - (\alpha - 1)[1 - (1 + \lambda x_i)^{-\theta}]] - \frac{i}{n + 1} \right]^2 \quad (19)$$

ويمكن إيجاد مقدرات المربعات الصغرى المرجحة من خلال الحصول على التفاضل الجزئي الأول لكل معلمة من المعلمات وتكون على الشكل التالي:

$$W_{\alpha}(\alpha, \lambda, \theta) = \sum_{i=1}^n \frac{(n + 1)^2(n + 2)}{i(n - i - 1)} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[1 - \frac{1}{\log \alpha} \log [\alpha - (\alpha - 1)[1 - (1 + \lambda x_i)^{-\theta}]] - \frac{i}{n + 1} \right]^2$$

$$W_{\lambda}(\alpha, \lambda, \theta) = \sum_{i=1}^n \frac{(n+1)^2(n+2)}{i(n-i-1)} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[1 - \frac{1}{\log \alpha} \log \left[\alpha - (\alpha-1) [1 - (1 + \lambda x_i)^{-\theta}] \right] - \frac{i}{n+1} \right]^2$$

$$W_{\theta}(\alpha, \lambda, \theta) = \sum_{i=1}^n \frac{(n+1)^2(n+2)}{i(n-i-1)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[1 - \frac{1}{\log \alpha} \log \left[\alpha - (\alpha-1) [1 - (1 + \lambda x_i)^{-\theta}] \right] - \frac{i}{n+1} \right]^2$$

ويمكن الحصول على تقديرات المربعات الصغرى المرجحة للمعالم المجهولة من خلال مساواة المعادلات السابقة بالصفر.

(4-5) طريقة كرامير وفان ميسس (CME) Cramer-von-Mises estimator

ويطلق عليها طريقة مقدرات المسافة الصغرى وهي تعتمد على الفرق بين مقدر دالة التوزيع التراكمية ودالة التوزيع التجريبية. ويمكن الحصول على المقدرات عن طريق تقليل المعادلة التالية بالنسبة للمعالم المجهولة (Dey, et al. 2018):

$$C(\alpha, \lambda, \theta) = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n \left[1 - \frac{1}{\log \alpha} \log \left[\alpha - (\alpha-1) [1 - (1 + \lambda x_i)^{-\theta}] \right] - \frac{2i-1}{2n} \right]^2 \quad (20)$$

ويمكن إيجاد مقدرات كرامير وفان ميسس من خلال الحصول على التفاضل الجزئي الأول لكل معلمة من المعلمات وتكون على الشكل التالي:

$$\frac{\partial LC}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^n \left[\frac{-2(1 - [1 - (1 + \lambda x_i)^{-\theta}])}{\log(\alpha) [\alpha - (\alpha-1) [1 - (1 + \lambda x_i)^{-\theta}]]} + \frac{2}{\alpha(\log \alpha)^2} \log \left[\alpha - (\alpha-1) [1 - (1 + \lambda x_i)^{-\theta}] \right] \right] \left[1 - \frac{1}{\log \alpha} \log \left[\alpha - (\alpha-1) [1 - (1 + \lambda x_i)^{-\theta}] \right] - \frac{2i-1}{2n} \right]$$

$$\frac{\partial LC}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^n \frac{2(\theta(\alpha - 1)x_i(1 + \lambda x_i)^{-(\theta+1)})}{\log(\alpha) [\alpha - (\alpha - 1)[1 - (1 + \lambda x_i)^{-\theta}]} \left[1 - \frac{1}{\log \alpha} \log [\alpha - (\alpha - 1)[1 - (1 + \lambda x_i)^{-\theta}]] - \frac{2i - 1}{2n} \right]$$

$$\frac{\partial LC}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^n \frac{2((\alpha - 1)(1 + \lambda x_i)^{-\theta} \log(1 + \lambda x_i))}{\log(\alpha) [\alpha - (\alpha - 1)[1 - (1 + \lambda x_i)^{-\theta}]} \left[1 - \frac{1}{\log \alpha} \log [\alpha - (\alpha - 1)[1 - (1 + \lambda x_i)^{-\theta}]] - \frac{2i - 1}{2n} \right]$$

ويمكن الحصول على تقديرات كرامير وفان ميسس للمعالم المجهولة من خلال مساواة المعادلات السابقة بالصفر.

(٥) دراسة محاكاة توزيع (ALTLx)

تم إجراء دراسة محاكاة مونت كارلو بناءً على ١٠٠٠ تكرار بعينات عشوائية مختلفة لإتباع البيانات التي تم إنشاؤها من توزيع (ALTLx)، حيث يتم توزيع X_i كتوزيع (ALTLx) لمعلمت مختلفة $(\alpha, \lambda, \theta)$ بقيم فعلية مختلفة لكل معلمة ولعينات مختلفة الأحجام حيث كانت $n=20,50,100,150,200,250,300$. قمنا بمقارنة أداء طرق التقدير المختلفة WLS، LS، MLE، CME بناءً على بعض معايير الجودة وهم: الخطأ المعياري (S.E)، مقدار التحيز و جذر متوسط مربعات الخطأ (RMSE) Root Mean Square Error لأحجام عينات مختلفة، Bias كما تم حساب متوسط التقديرات (ME) Mean Estimates لكل تقدير عن طريق استخدام الحزمة الإحصائية (15) MathCAD، وفي ثلاث حالات مختلفة كما يلي:

Case 1: $\alpha = 0.2, \lambda = 2.5, \theta = 1.5$

Case 2: $\alpha = 0.2, \lambda = 0.5, \theta = 3$

Case 3: $\alpha = 0.3, \lambda = 1.9, \theta = 3.5$

ومن خلال نتائج المحاكاة التي تم عرضها في الملحق المرافق في الجداول للحالات الثلاثة لتوزيع (ALTLx) توصلت الدراسة للآتي:

١. أظهرت طرق التقدير المستخدمة MLE، LS، WLS، CME بالاعتماد على المعلومات الأولية اقتراب القيم التقديرية من القيم الافتراضية للمعالم الثلاثة α, λ, θ .
٢. من خلال نتائج المحاكاة تبين أن مقدرات طريقة المربعات الصغرى المرجحة WLS أقل كفاءة من بقية طرق التقدير المستخدمة حيث تحتوي على أكبر قيم لمعايير جودة النموذج في معظم حالات التقدير ولأحجام عينات مختلفة.
٣. كلما زاد حجم العينة زادت جودة التقدير باستخدام طرق التقدير المختلفة وذلك من خلال تناقص قيم معايير جودة النموذج S.E، RMSE، Bias مما يتفق مع النظرية الإحصائية.
٤. بناءً على جداول نتائج المحاكاة، تزداد قيم معايير جودة النموذج S.E، RMSE، Bias مع زيادة قيم معلمت التوزيع (ALTLx)، لجميع طرق التقدير المختلفة.

٥. طريقة المربعات الصغرى LS تمتلك أقل قيم لمعايير جودة النموذج S.E، RMSE، Bias وذلك في معظم حالات θ لأحجام عينات مختلفة في المجموعة الأولى لتقدير توزيع (ALTLx)
٦. في حالة أحجام العينات الكبيرة ومع تناقص قيم معايير جودة النموذج S.E، RMSE، Bias كانت تتقارب قيم معايير جودة النموذج لطرق التقدير الثلاثة طريقة الإمكان الأعظم MLE وطريقة كرامير CME وطريقة المربعات الصغرى LS إلا أن الأفضلية كانت لطريقة الإمكان الأعظم MLE في تقدير معالم التوزيع الثلاثة، في ظل الحالات المختلفة للتقدير.
٧. بشكل عام تبين من خلال نسبة الكفاءة لتقدير المعلمات الثلاثة لتوزيع (ALTLx) أفضلية طريقة الإمكان الأعظم MLE في التقدير عن باقي الطرق المستخدمة لأحجام العينات المختلفة وفي ظل وجود المجموعات الثلاثة.

(7) التطبيق العملي لتوزيع (ALTLx)

في هذا الجزء تم اثبات كفاءة ومرونة التوزيع الجديد (ALTLx) من خلال استخدام مجموعتين مختلفتين من البيانات، وفي البداية تم عمل تقدير لمعامل توزيع (ALTLx) عددياً عن طريق استخدام طريقة الإمكان الأعظم من خلال برنامج (15) MathCAD، كما تم استخدام تلك التقديرات للتأكد من جودة وملاءمة البيانات للتوزيع الجديد من خلال استخدام بعض الاختبارات والمقاييس مثل اختبار كولومجروف-سميرنوف وحساب قيمة (P-value) وأيضاً (AIC، BIC، HQIC، CAIC، A^* ، W^*) مقارنة التوزيع الجديد ببعض التوزيعات الأخرى وهي: (وايبل لوماكس (WL) Weibull Lomax، معكوس لوماكس (ILx) Inverted Lomax، Alpha power inverse Lomax (APILx)، Power Lomax (PLx)، Exponentiated Lomax (ELx) حيث تأخذ دوال الكثافة الاحتمالية لهذه التوزيعات الصور التالية:

$$WLx: f(x, \alpha, \beta, \gamma, \lambda) = \frac{\alpha\beta\gamma}{\lambda} \left(1 + \frac{x}{\lambda}\right)^{\beta\gamma-1} \left[1 - \left(1 + \frac{x}{\lambda}\right)^{-\gamma}\right]^{\beta-1} \exp \left[-\alpha \left[\left(1 + \frac{x}{\lambda}\right)^{\gamma} - 1\right]^{\beta}\right]$$

$$ILx: f(x, \alpha, \beta) = \frac{\alpha\beta}{x^2} \left(1 + \frac{\beta}{x}\right)^{-(1+\alpha)}$$

$$APILx: f(x, a, b, \alpha) = \frac{\ln(\alpha) ab}{\alpha-1 x^2} \left(1 + \frac{b}{x}\right)^{-a-1} a \left(1 + \frac{b}{x}\right)^{-a}$$

$$PLx: f(x, \alpha, \beta, \lambda) = \alpha\beta\lambda^{\alpha} x^{\beta-1} (\lambda + x^{\beta})^{-\alpha-1}$$

$$ELx: f(x, \alpha, \theta, \gamma) = \alpha\theta\gamma \left[1 - (1 + \gamma x)^{-\theta}\right]^{\alpha-1} (1 + \gamma x)^{-(\theta+1)}$$

كما تم أيضاً الحصول على تقدير معالم التوزيع (ALTLx) من خلال طرق التقدير وهي الإمكان الأعظم والمربعات الصغرى والمربعات الصغرى المرجحة وطريقة كرامير وفان ميسس وذلك لعرض مقدرات المعالم للمجموعة الأولى والثانية من البيانات، وتم حساب الخطأ المعياري لطريقة الإمكان الأعظم من خلال برنامج (15) MathCAD.

• المجموعة الأولى من البيانات

المجموعة الأولى من البيانات تشمل 34 مشاهدة لبيانات كلوريد الفينيل (Vinyl chloride) التي تم الحصول عليها من خلال مراقبة تنظيف آبار المياه الجوفية وتم نشرها بواسطة Bhaumik et al. (2009).

في الجدول التالي (4) سوف يتم عرض تقديرات الإمكان الأعظم لتوزيع (ALTLx) والتوزيعات المقارنة كذلك الخطأ المعياري (S.E). كما يوضح جدول (5) النتائج الخاصة بمقاييس جودة التوفيق (AIC، BIC، HQIC، CAIC، A^* ، W^*) للتوزيع الجديد (ALTLx) والتوزيعات المقارنة من خلال برنامج (15) MathCAD باستخدام تقديرات الإمكان الأعظم في جدول (4) وذلك بالتطبيق على بيانات المجموعة الأولى.

تقديرات الإمكان الأعظم							التوزيع
b	a	γ	β	θ	λ	α	
-	-	-	-	6.252 (10.586)	0.115 (0.293)	1.666 (4.111)	ALTLx
-	-	1.158 (0.046)	0.954 (0.162)	-	0.893 (0.472)	0.37 (0.416)	WLx
-	-	-	-	0.268 (0.231)	3.11 (2.101)	-	ILX
1.356 (1.041)	1.861 (0.534)	-	-	-	-	0.051 (0.096)	APILx
-	-	-	2.008 (0.503)	-	0.364 (0.382)	0.492 (0.227)	PLx
-	-	1.413 (5.51)	-	1.524 (1.939)	-	2.455 (4.357)	ELx

جدول (4) تقديرات الإمكان الأعظم لمعاملات توزيع (ALTLx) والتوزيعات المقارنة للمجموعة الأولى من البيانات

جدول (5) بعض مقاييس جودة التوفيق لتوزيع (ALTLx) والتوزيعات المقارنة للمجموعة الأولى من البيانات

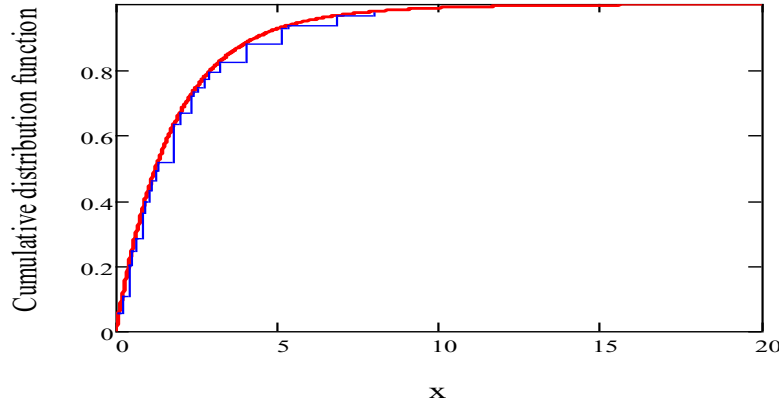
مقاييس جودة التوفيق									التوزيع
W^*	A^*	P-value	K.s	CAIC	HQIC	BIC	AIC	$-2\hat{L}$	
0.04	0.259	0.971	0.084	117.878	118.639	121.657	117.078	111.078	ALTLx
0.052	0.338	0.842	0.106	120.686	121.389	125.413	119.307	111.307	WLx
0.06	0.458	0.904	0.097	119.12	119.774	121.785	118.733	114.733	ILx
0.047	0.342	0.899	0.098	119.764	120.525	123.543	118.964	112.964	APILx
0.067	0.477	0.949	0.089	121.458	122.22	125.237	120.658	114.658	PLx
0.043	0.321	0.923	0.094	118.901	119.662	122.68	118.101	112.101	ELx

ومن الجدول السابق يتضح التالي:

(١) يعتبر توزيع (ALTLx) أفضل من التوزيعات الأخرى في توفيق هذه المجموعة من البيانات حيث أن قيم ($W^*, A^*, K.S$) أقل ما يمكن عند هذا التوزيع ، وكما أن هذا التوزيع له أعلى قيمة عند P-value.

(٢) من خلال مقاييس (CAIC ,HQIC ,BIC ,AIC) فإن توزيع (ALTLx) يحقق أقل قيم مقارنة بالتوزيعات الأخرى وهذا يدل على كفاءة التوزيع الجديد.

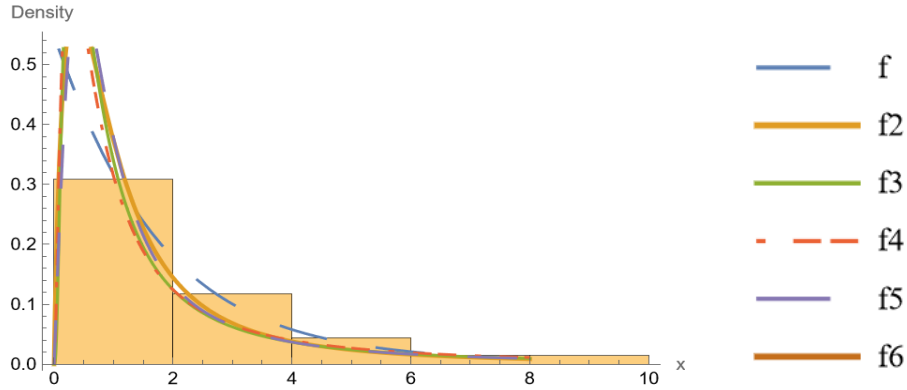
ومن خلال رسم دالة التوزيع التجميعية للتعيم الجديد (ALTLx) والدالة التجريبية Empirical function لمجموعة البيانات الأولى يتضح أن التعيم الجديد (ALTLx) قادر على توفيق البيانات بشكل جيد ويظهر ذلك في الشكل (٤)



شكل (٤):

توفيق دالة Cdf لتوزيع (ALTLx) للمجموعة الأولى من البيانات

ومن خلال رسم دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع (ALTLx) ودوال الكثافة الاحتمالية للتوزيعات المقارنة ومقارنتها برسم Histogram pdf للمجموعة الأولى من البيانات تبين أن توزيع (ALTLx) يعطي أفضل توفيق للبيانات، حيث أن منحنى f هو الأقرب في تمثيل المدرج التكراري للبيانات من التوزيعات الأخرى، ويتضح ذلك في الشكل (٥) كالتالي:



شكل (5) توفيق دالة pdf لتوزيع (ALTLx) والتوزيعات المقارنة للمجموعة الأولى من البيانات

كما تم الحصول على تقديرات لمعاملات التوزيع الجديد (ALTLx) عددياً عن طريق استخدام طرق التقدير المستخدمة في الدراسة من خلال برنامج (15) MathCAD. وتم عرض التقديرات المختلفة لتوزيع (ALTLx) وبعض مقاييس جودة التوفيق وهي (W^* , A^*) من خلال التطبيق على بيانات المجموعة الأولى وهذا في الجدول التالي (6).

جدول (6) نتائج تقديرات طرق MLE، LS، WLS، CME ومقاييس (W^* , A^*) لمجموعة البيانات الأولى

Model	Methods	Estimates				
		α	λ	θ	A^*	W^*
ALTLx (α, λ, θ)	MLE	١,٦٦٦	٠,١١٥	٦,٢٥٢	٠,٢٥٩	٠,٠٤
	LS	٢,٥٧٨	٠,٣٢٨	٢,٨٨٣	٠,٢٢٦	٠,٠٣٥
	WLS	٣,٠٩٣	٠,٣٠٥	٣,١٨٨	٠,٢٣٥	٠,٠٣٧
	CME	٥,٩٦٥	٠,٤١١	٣,٠٦٣	٠,٢٤٣	٠,٠٣٨

ومن خلال الجدول السابق (6) ووفقاً لمجموعة البيانات الأولى، يتضح أن تقدير LS أفضل طريقة للتقدير حيث تحتوي على أقل قيم لمقاييس (W^* , A^*).

• المجموعة الثانية من البيانات

تتضمن المجموعة الثانية من البيانات عينة عشوائية من المرضى الذين يعانون من التهاب رئوي مزدوج وأيضاً مصابون بالكورونا COVID-19 حيث تم الحصول على هذه البيانات من مستشفى الصدر بدمياط في الفترة من 2020/6/2 الى 2020/9/19 وهي عبارة عن مجموعة من البيانات الخاصة بأوقات الفشل (الوفاة) لعينة عشوائية مكونة من 60 مريضاً حيث تتراوح أعمارهم من 45 الى 86 سنة.

ويقدم جدول (7) تقديرات الإمكان الأعظم لتوزيع (ALTLx) والتوزيعات المقارنة وايضاً الخطأ المعياري (S.E). كما يوضح جدول (8) النتائج الخاصة بمقاييس جودة التوفيق للتوزيع الجديد (ALTLx) والتوزيعات المقارنة وذلك من خلال برنامج (15) MathCAD باستخدام تقديرات الإمكان الأعظم في جدول (7) وذلك بالتطبيق على بيانات المجموعة الثانية.

جدول (7) تقديرات الإمكان الأعظم لمعلمات توزيع (ALTLx) والتوزيعات المقارنة للمجموعة الثانية من البيانات

تقديرات الإمكان الأعظم							التوزيع
b	a	γ	β	θ	λ	α	
-	-	-	-	9.606 (24.943)	0.034 (0.132)	4.822 (18.955)	ALTLx
-	-	0.587 (0.018)	1.727 (0.186)	-	0.068 (0.012)	0.014 (0.013)	WLx
-	-	-	-	0.475 (0.491)	4.69 (4.039)	-	ILX
0.12 (0.241)	11.937 (20.519)	-	-	-	-	2.966 (3.741)	APILx
-	-	-	1.257 (0.17)	-	22.668 (16.737)	3.487 (2.526)	PLx
-	-	1.127 (0.108)	-	2.899 (1.52)	-	1.575 (0.429)	ELx

جدول (8) بعض مقاييس جودة التوفيق لتوزيع (ALTLx) والتوزيعات المقارنة للمجموعة الثانية من البيانات

مقاييس جودة التوفيق									التوزيع
W^*	A^*	P-value	K.s	CAIC	HQIC	BIC	AIC	$-2\hat{L}$	
0.088	0.698	0.461	0.11	321.088	323.117	326.942	320.659	314.659	ALTLx
0.09	0.7	0.307	0.125	321.622	324.172	329.272	320.895	312.895	WLx
0.34	2.113	0.185	0.141	329.376	330.804	333.354	329.165	325.165	ILx
0.333	2.078	0.236	0.133	330.882	332.911	336.736	330.453	324.453	APILx
0.112	0.808	0.288	0.127	321.172	323.201	327.026	320.743	314.743	PLx
0.154	1.036	0.339	0.121	322.457	324.486	328.312	322.029	316.029	ELx

ومن الجدول السابق يتضح التالي:

(١) من خلال الاعتماد على مقاييس $(W^*, A^*, K.S)$ فإنه يمكننا القول بأن التوزيع الجديد

(ALTLx) تفوق على التوزيعات الأخرى في توفيق مجموعة البيانات، حيث أن القيم

عند هذه الإحصاءات أقل ما يمكن عند هذا التوزيع وأيضاً له أعلى قيمة عند P-value.

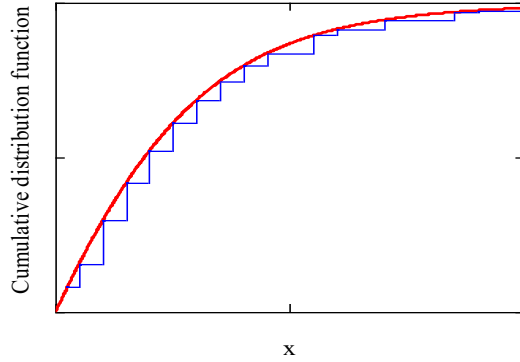
(٢) من خلال مقاييس (CAIC, HQIC, BIC, AIC) فإن توزيع (ALTLx) يحقق أقل

قيم مقارنة بالتوزيعات الأخرى وهذا يدل على كفاءة التوزيع الجديد.

ومن خلال رسم دالة التوزيع التجميعية للتعيم الجديد (ALTLx) والدالة التجريبية Empirical

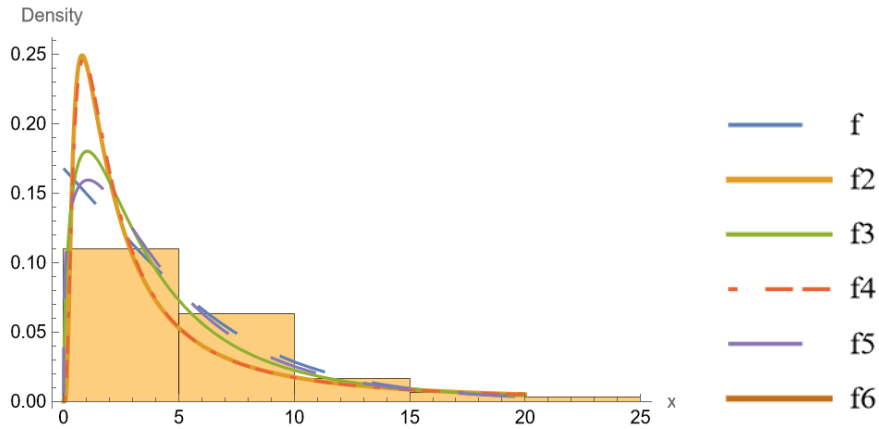
function لمجموعة البيانات الثانية يتضح أن التعيم الجديد (ALTLx) قادر على توفيق البيانات بشكل

جيد ويظهر ذلك في الشكل (٦).



شكل (٦): توفيق دالة Cdf لتوزيع (ALTLx) للمجموعة الثانية من البيانات

ومن خلال رسم دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع (ALTLx) ودوال الكثافة الاحتمالية للتوزيعات المقارنة ومقارنتها برسم Histogram pdf للمجموعة الثانية من البيانات تبين أن توزيع (ALTLx) يعطي أفضل توفيق للبيانات، حيث أن منحنى f هو الأقرب في تمثيل المدرج التكراري للبيانات من التوزيعات الأخرى، ويتضح ذلك في الشكل (٧) كالتالي:



شكل (٧) توفيق دالة pdf لتوزيع (ALTLx) والتوزيعات المقارنة للمجموعة الثانية من البيانات

وجداول (9) يعرض التقديرات المختلفة لتوزيع (ALTLx) وبعض مقاييس جودة التوفيق (W^*, A^*) من خلال التطبيق على بيانات المجموعة الثانية.

جدول (٩) نتائج تقديرات طرق MLE، LS، WLS، CME ومقاييس (W^*, A^*) لمجموعة البيانات الثانية

Model	Methods	Estimates				
		α	λ	θ	A^*	W^*
ALTLx (α, λ, θ)	MLE	٤,٨٢٢	٠,٠٣٤	٩,٦٠٦	٠,٦٩٨	٠,٠٨٨
	LS	٥,٣٥	٠,٠٧١	٥,١٤٦	٠,٧٢٤	٠,٠٩٤
	WLS	٧,١٧٣	٠,٠٥٩	٦,٤٤٥	٠,٧٠٣	٠,٠٨٩
	CME	٥,٩٦٦	٠,٠٦٦	٥,٦٠١	٠,٧١٤	٠,٠٩٢

ويوضح جدول (٩) ووفقاً للمجموعة الثانية من البيانات، أن تقدير MLE أفضل طريقة للتقدير حيث تحتوي على أقل قيم لمقاييس (W^*, A^*) .

(8) النتائج

في هذه الدراسة تم الحصول على تعميم جديد لتوزيع لوماكس (Lx) من خلال استخدام عائلة α اللوغاريتمي المحول " (ALTLx) ذي ثلاث معلمات، وهذا التعميم الجديد يعطي دقة أعلى في توفيق البيانات. كما أمكن التوصل إلى بعض الخصائص الإحصائية للتعميم الجديد (ALTLx) مثل دالة الكوانتيل والعزوم التقليدية والعزوم غير الكاملة والإحصاءات الترتيبية وغيرها والتي سوف تكون ذي فائدة للباحثين في هذا المجال. وإيضاً تم الحصول على مقدرات التعميم الجديد (ALTLx) باستخدام بعض طرق التقدير وهي الإمكان الأعظم، المربعات الصغرى، المربعات الصغرى المرجحة وطريقة كرامير وفان ميسس، كما تم تقديم دراسة محاكاة له لمقارنة أداء مختلف المقدرات وذلك باستخدام الحزمة الإحصائية (15) MathCAD حيث أظهرت نتائج المحاكاة ان الأفضلية لطريقة الإمكان الأعظم MLE في التقدير عن باقي الطرق المستخدمة لأحجام العينات المختلفة حيث تحتوي على أقل قيم لمعايير جودة النموذج.

كما تم التطبيق على مجموعتين مختلفتين من البيانات وذلك لإثبات كفاءة التعميم الجديد (ALTLx). ومن خلال استخدام بعض مقاييس جودة التوفيق $(W^*, A^*, P\text{-value}, K)$ ، تم مقارنة التعميم الجديد (ALTLx) ببعض التوزيعات الأخرى (WLx، ILx، APILx، PLx، ELx) وتم التوصل إلى أن التعميم الجديد (ALTLx) يعطي دقة أعلى في توفيق مجموعتي البيانات محل الدراسة.

المراجع:

- Abo-Raya, M. (2019). A new extension of the Lomax distribution with properties and applications to failure times data. *Pakistan Journal of Statistics and Operation Research*, 461-479.
- Afify, A. Z., Nofal, Z. M., Yousof, H. M., El Gebaly, Y. M., & Butt, N. S. (2015). The transmuted Weibull Lomax distribution: properties and application. *Pakistan Journal of Statistics and Operation Research*, 135-152.
- Al-Ghamdi, A. A., Mahmoud, W. E., Yaghmour, S. J., & Al-Marzouki, F. M. (2009). Structure and optical properties of nanocrystalline NiO thin film synthesized by sol-gel spin-coating method. *Journal of Alloys and compounds*, 486(1-2), 9-13.
- Ashour, S. K., & Eltehiwy, M. A. (2013). Transmuted exponentiated Lomax distribution. *Australian Journal of Basic and Applied Sciences*, 7(7), 658-667.
- Atkinson, M., & Harrison, A. J. (1978). *Distribution Personal Wealth in Britan*, Cambridge; New York: Cambridge University Press, CUP Archive.
- Bhaumik, D. K., Kapur, K., & Gibbons, R. D. (2009). Testing parameters of a gamma distribution for small samples. *Technometrics*, 51(3), 326-334.
- Corbellini, A., Crosato, L., Ganugi, P and Mazzoli, M. (2009). Fitting Pareto II Distributions on Firm Size: Statistical Methodology and Economic Puzzles, *Advances in Data Analysis* pp 321–328, Part of the [Statistics for Industry and Technology](#) book series (SIT).
- Cordeiro, G. M., Ortega, E. M., & Popović, B. V. (2015). The gamma-Lomax distribution. *Journal of Statistical computation and Simulation*, 85(2), 305-319.
- Dey, S., Moala, F. A., & Kumar, D. (2018). Statistical properties and different methods of estimation of Gompertz distribution with application. *Journal of Statistics and Management Systems*, 21(5), 839-876.
- Harris, C. M. (1968). The Pareto distribution as a queue service discipline. *Operations Research*, 16(2), 307-313.

-
-
- Holland, O., Golaup, A., & Aghvami, A. H. (2006). Traffic characteristics of aggregated module downloads for mobile terminal reconfiguration. IEE Proceedings-Communications, 153(5), 683-690.
- Kilany, N. M. (2016). Weighted lomax distribution. SpringerPlus, 5(1), 1-18.
- Lomax, K. S. (1954). Business failures: Another example of the analysis of failure data. Journal of the American Statistical Association, 49(268), 847-852.
- McKenzie, D., Miller, C., & Falk, D. A. (2011). Synthesis: landscape ecology and changing fire regimes. In The landscape ecology of fire (pp. 295-303). Springer, Dordrecht.
- Pappas, V., Adamidis, K., & Loukas, S. (2012). A family of lifetime distributions. Journal of Quality and Reliability Engineering, 2012,1-6.
- Swain, J. J., Venkatraman, S., & Wilson, J. R. (1988). Least-squares estimation of distribution functions in Johnson's translation system. Journal of Statistical Computation and Simulation, 29(4), 271-297.
- Tahir, M. H., Cordeiro, G. M., Mansoor, M., & ZUBAİR, M. (2015). The Weibull-Lomax distribution: properties and applications. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 44(2), 455-474.

الملاحق:

نتائج المحاكاة للحالات الثلاث

جدول (1) متوسط التقديرات ومعايير الجودة لمعالم توزيع (ALTLx) في الحالة الاولى

(set: 1 $\alpha = 0.2, \lambda = 2.5, \theta = 1.5$)

n	Methods		ME	Bias	RMSE	S.E
20	MLE	α	٠,٢٩٥٠٢	٠,٠٩٥٠٢	٠,٣٨٣٠٨	٠,٠١٨٥٦
		λ	٢,٦٧٠٩٩	٠,١٧٠٩٩	١,١٢١١٦	٠,٠٥٥٤
		θ	١,٥٨٣٢٢	١,١٧٠٩٩	١,٢٥٨٤	٠,٠٢٣٠٤
	LS	α	٠,٤٠١٨١	٠,٢٠١٨١	١,٤٧٨٦	٠,٠٧٣٢٤
		λ	٢,٥٩٢٦٥	٠,٠٩٢٦٥	١,٦٢٦	٠,٠٨١١٧
		θ	١,٢٠٠٢١	١,٠٩٢٦٥	١,٢٦٨٣٢	٠,٠٣٢٢
	WLS	α	٠,٩٦٦٧٧	٠,٧٦٦٧٧	٥,٥٤٣٦٨	٠,٢٧٤٥٢
		λ	٣,١٢٤٨٩	٠,٦٢٤٨٩	٤,٢٢٢٩٤	٠,٢٠٨٨٢
		θ	١,٣٥٧٨٦	١,٦٢٤٨٩	٢,٠٥٦٧	٠,٠٦٣٠٤
	CME	α	٠,٤٩١٢٦	٠,٢٩١٢٦	٣,١٨٠٨٥	٠,١٥٨٣٧
		λ	٢,٥٨٨٣٣	٠,٠٨٨٣٣	١,٧٥٣٠٣	٠,٠٨٧٥٤
		θ	١,٢٠٥٢٤	١,٠٨٨٣٣	١,٢٨١٣	٠,٠٣٣٨١
50	MLE	α	٠,٢٢٤٦	٠,٠٢٤٦	٠,١٢٣٦٥	٠,٠٠٢٤٢
		λ	٢,٥٩٣٩٥	٠,٠٩٣٩٥	٠,٦٢٩١٤	٠,٠١٢٤٤
		θ	1.54414	١,٠٩٣٩٥	١,١٢٧٧٦	٠,٠٥٤٨
	LS	α	٠,١٦٢٢٩	-0.03771	٠,٢٨٧١١	٠,٠٠٥٦٩
		λ	٢,٤٠٣٢١	-0.09679	٠,٨٧٢٦١	٠,٠١٧٣٤
		θ	١,١٣١٠٩	0.90321	٠,٩٦٤٦١	٠,٠٠٦٧٧
	WLS	α	٠,٦٠٢٠٨	٠,٤٠٢٠٨	٢,٣٥٣٥٤	٠,٠٤٦٣٨
		λ	٢,٩٢٤٠٨	٠,٤٢٤٠٨	٣,٩٠٢٢٨	٠,٠٧٧٥٨
		θ	١,٢٦٨٥٩	1.42408	١,٧٢٤٣٢	٠,٠١٩٤٥
	CME	α	٠,١٩٨٥٣	-0.00147	٠,٥٤٦٢٦	٠,٠١٠٩٣
		λ	٢,٣٣٢٤٢	-0.16758	٠,٩٠٤٣٥	٠,٠١٧٧٧
		θ	١,٠٩٨١٩	0.83242	٠,٨٩٤٠٦	٠,٠٠٦٥٢
100	MLE	α	٠,٢١٤٥١	٠,٠١٤٥١	٠,٠٧٧٤٨	٠,٠٠٠٧٦
		λ	٢,٥٣٠٦٩	٠,٠٣٠٦٩	٠,٤١٣٦١	٠,٠٠٤١٢
		θ	1.51824	١,٠٣٠٦٩	١,٠٤٦٦٣	٠,٠٠١٨٢
	LS	α	٠,١٢١٢٨	-0.07872	٠,١٢٧٧٣	٠,٠٠١٠١
		λ	٢,٢٧٤٣٥	-0.22565	٠,٥٨٣٢٥	٠,٠٠٥٣٨
		θ	١,٠٨٢٢٧	0.77435	٠,٧٩٩٥	٠,٠٠١٩٩
	α	٠,٤٨٦	٠,٢٨٦	٢,٧٢١٦٣	٠,٠٢٧٠٧	
	λ	٢,٨٠٢٨٤	٠,٣٠٢٨٤	٣,٠٣٢٣٨	٠,٠٣٠١٧	

	WLS	θ	١,٢١٢٤٥	1.30284	١,٤٥٥١٣	٠,٠٠٦٤٨	
		α	٠,١٢١٤٦	-0.07854	٠,١٢٨٠٦	٠,٠٠١٠١	
	CME	λ	٢,٢٧٤٧٥	-0.22525	٠,٥٨٤٥٨	٠,٠٠٥٣٩	
		θ	١,٠٨٢٣٤	0.77475	٠,٨	٠,٠٠١٩٩	
150	MLE	α	٠,٢٠٨٥٨	٠,٠٠٨٥٨	٠,٠٦٠٥٦	٠,٠٠٠٠٤	
		λ	٢,٥٢٥٤٥	٠,٠٢٥٤٥	٠,٣٣٦٢٦	٠,٠٠٢٢٤	
		θ	1.51213	١,٠٢٥٤٥	١,٠٣٥٨٣	٠,٠٠٠٩٨	
	LS	α	٠,١١٠٨٦	-0.08914	٠,١١٧٩٣	٠,٠٠٠٥١	
		λ	٢,٢٦٢٤١	-0.23759	٠,٥٠٢٧٦	٠,٠٠٢٩٥	
		θ	١,٠٧٨٩	0.76241	٠,٧٨٠٩٥	٠,٠٠١١٣	
	WLS	α	٠,٣٠٦٩٣	٠,١٠٦٩٣	١,٥٠٦٦٥	٠,٠١٠٠٢	
		λ	٢,٥٤٧٨٧	٠,٠٤٧٨٧	١,٦٨١٧٢	٠,٠١١٢١	
		θ	١,١٥٢٠٩	1.04787	١,١٧٦٨٨	٠,٠٠٣٥٧	
	CME	α	٠,١١٠٩٥	-0.08905	٠,١١٨٠٥	٠,٠٠٠٥٢	
		λ	٢,٢٦٢٥٦	-0.23744	٠,٥٠٣٤	٠,٠٠٢٩٦	
		θ	١,٠٧٨٩٣	0.76256	٠,٧٨١١٥	٠,٠٠١١٣	
200	MLE	α	٠,٢٠٥٤٣	٠,٠٠٥٤٣	٠,٠٥٢١٧	٠,٠٠٠٢٦	
		λ	٢,٥٢٥٥٥	٠,٠٢٥٥٥	٠,٢٩٩٠٦	٠,٠٠١٤٩	
		θ	١,٥١٢٠٥	١,٠٢٥٥٥	١,٠٣٣٨٩	٠,٠٠٠٦٦	
	LS	α	٠,١٠٣٤٢	-0.09658	٠,١١٠٩٣	٠,٠٠٠٢٧	
		λ	٢,٢٥٠٥٥	-0.24945	٠,٤٥٤٤٩	٠,٠٠١٩	
		θ	١,٠٧٣٩٣	0.75055	٠,٧٦٤٢٤	٠,٠٠٠٧٢	
	WLS	α	٠,٣٤٦٣٥	0.14635	١,٤٧٩٨٥	٠,٠٠٧٣٦	
		λ	٢,٥٥٠٣٧	٠,٠٥٠٣٧	١,٤٨٧٩٩	٠,٠٠٧٤٤	
		θ	١,١٦٠٧٤	1.05037	١,١٥٨٥٦	٠,٠٠٢٤٤	
	CME	α	٠,١٠٣٤٦	-0.09654	٠,١١٠٩٥	٠,٠٠٠٢٧	
		λ	٢,٢٥٠٥٨	-0.24942	٠,٤٥٤٨٩	٠,٠٠١٩	
		θ	١,٠٧٣٩٤	0.75058	٠,٧٦٤٣١	٠,٠٠٠٧٢	
250	MLE	α	٠,٢٠٤٥	0.0045	٠,٠٤٤٤٥	٠,٠٠٠١٨	
		λ	٢,٥١٣٥٦	٠,٠١٣٥٦	٠,٢٥٣٣٣	٠,٠٠١٠١	
		θ	١,٥٠٦٤٤	١,٠١٣٥٦	١,٠١٩٩١	٠,٠٠٠٤٥	
	LS	α	٠,٠٩٩٤١	-0.10059	٠,١١٢٣	٠,٠٠٠٠٢	
		λ	٢,٢٥٣٥١	-0.24649	٠,٤١٢٧٧	٠,٠٠١٣٢	
		θ	١,٠٧١٨٦	0.75351	٠,٧٦٤٠٨	٠,٠٠٠٥١	
	WLS	α	٠,٣٤٤٢٨	٠,١٤٤٢٨	٢,١٠٧٦٨	٠,٠٠٨٤١	
		λ	٢,٥٦٥٥١	٠,٠٦٥٥١	١,٤٨٥٥	٠,٠٠٥٩٤	
		θ	١,١٧٣٦٤	1.06551	١,١٧٨٨١	٠,٠٠٢٠٢	
			α	٠,٠٩٩٤٣	-0.10057	٠,١١٢٣٢	٠,٠٠٠٠٢
			λ	٢,٢٥٣٥٩	-0.24641	٠,٤١٣٠٢	٠,٠٠١٣٣

300	CME	θ	١,٠٧١٨٨	0.75359	٠,٧٦٤١٩	٠,٠٠٠٥١
	MLE	α	٠,٢٠٤٤١	٠,٠٠٤٤١	٠,٠٤١٤٣	٠,٠٠٠١٤
		λ	٢,٥٠٨٣٣	٠,٠٠٨٣٣	٠,٢٣٦٨	٠,٠٠٠٧٩
		θ	١,٥٠٣٣٧	١,٠٠٨٣٣	١,٠١٣٨	٠,٠٠٠٣٥
	LS	α	٠,٠٩٨٥٢	-0.10148	٠,١١٠٣٥	٠,٠٠٠١٤
		λ	٢,٢٣٣٧٦	-0.26624	٠,٤١٠٨٧	٠,٠٠١٠٤
		θ	١,٠٦٤٠٤	0.73376	٠,٧٤٢٨٩	٠,٠٠٠٣٩
	WLS	α	٠,٢٧٥١٨	٠,٠٧٥١٨	٠,٧٥٧٦٤	٠,٠٠٢٥١
		λ	٢,٥٣٤٦٣	٠,٠٣٤٦٣	١,٨٧٧٤٨	٠,٠٠٦٢٦
		θ	١,١٣٧٩٦	1.03463	١,١٢٩٦١	٠,٠٠١٥١
	CME	α	٠,٠٩٨٥٤	-0.10146	٠,١١٠٣٦	٠,٠٠٠١٤
		λ	٢,٢٣٣٧٩	-0.26621	٠,٤١١٠٦	٠,٠٠١٠٤
		θ	١,٠٦٤٠٤	0.73379	٠,٧٤٢٩٣	٠,٠٠٠٣٩

جدول (2) متوسط التقديرات ومعايير الجودة لمعالم توزيع (ALTLx) في الحالة الثانية

(set: $2 \alpha = 0.2, \lambda = 0.5, \theta = 3$)						
n	Methods		ME	Bias	RMSE	S.E
20	MLE	α	٠,٢٩٥٠٢	٠,٠٩٥٠٢	٠,٣٨٣٠٩	٠,٠١٨٥٦
		λ	٠,٥٢٨٨٨	٠,٠٢٨٨٨	٠,١٩٣٣٨	٠,٠٠٩٥٦
		θ	٣,١٦٦٤٤	-2.47112	٢,٦٣٧٣٩	٠,٠٤٦٠٨
	LS	α	٠,٤٦٦٨٢	0.26682	٢,٦٤١٧٦	٠,١٣١٤١
		λ	٠,٤٥٢٣٧	-0.04763	٠,٢٨٣٨٤	٠,٠١٣٩٩
		θ	٢,٤٠٥١٢	-2.54763	٢,٨٧٣٥٤	٠,٠٦٦٤٦
	WLS	α	٠,٩٦٦٧٧	0.76677	٥,٥٤٣٦٨	٠,٢٧٤٥٢
		λ	٠,٥٣٠٧٢	0.03072	٠,٥٦٦٩٩	٠,٠٢٨٣١
		θ	٢,٧١٥٧١	-2.46928	٣,٥٢٩٣٤	٠,١٢٦٠٨
	CME	α	٠,٤٩١٢٦	0.29126	٣,١٨٠٨٥	٠,١٥٨٣٧
		λ	٠,٤٥٣٨٨	-0.04612	٠,٢٨٨٧٨	٠,٠١٤٢٥
		θ	٢,٤١٠٤٨	-2.54612	٢,٨٨٣٠٢	٠,٠٦٧٦٢
50	MLE	α	٠,٢٣٣٩٣	٠,٠٣٣٩٣	٠,١٣٣٣٨	٠,٠٠٢٥٨
		λ	٠,٥٠٩٢٩	٠,٠٠٩٢٩	٠,١١٠٧٦	٠,٠٠٢٢١
		θ	3.05746	-2.49071	٢,٥٥١٠٩	٠,٠١١٠٤
	LS	α	٠,١٦٩	-0.031	٠,٢٧٦٦٦	٠,٠٠٠٥٥
		λ	٠,٤٢١٢٩	-0.07871	٠,١٥٩٦٧	٠,٠٠٢٧٨
		θ	٢,٢٤٠١٢	-2.57871	٢,٦٥٣٥١	٠,٠١٢٥١

	WLS	α	٠,٦٧٧٠١	٠,٤٧٧٠١	٤,٣١٣٣٥	٠,٠٨٥٧٤	
		λ	٠,٥١٣٣٦	٠,٠١٣٣٦	٠,٥١٥٣	٠,٠١٠٣	
		θ	٢,٦١٨١٢	-2.48664	٣,٤٤٠٦٨	٠,٠٤٧٥٦	
	CME	α	٠,١٧٣٩٥	-0.02605	٠,٣٨١٨٩	٠,٠٠٧٦٢	
		λ	٠,٤١٦٧	-0.0833	٠,١٥٨٢٥	٠,٠٠٢٦٩	
		θ	٢,٢٤١٤٨	-2.5833	٢,٦٦١١٤	٠,٠١٢٧٨	
	100	MLE	α	٠,٢١٤٥١	٠,٠١٤٥١	٠,٠٧٧٤٨	٠,٠٠٠٧٦
			λ	٠,٥٠٦٠٥	٠,٠٠٦٠٥	٠,٠٧٣٦٨	٠,٠٠٠٧٣
			θ	3.03648	-2.49395	٢,٥٢٠٣٦	٠,٠٠٣٦٤
LS		α	٠,١٢١٢٨	-0.07872	٠,١٢٧٧٣	٠,٠٠١٠١	
		λ	٠,٤٠٢٨٦	-0.09714	٠,١٢٩٤٢	٠,٠٠٠٨٦	
		θ	٢,١٦٤٥٣	-2.59714	٢,٦٢٧٤٤	٠,٠٠٣٩٨	
WLS		α	٠,٤٨٦	٠,٢٨٦	٢,٧٢١٦٣	٠,٠٢٧٠٧	
		λ	٠,٤٦٦١٣	-0.03387	٠,٢٩٩٦	٠,٠٠٢٩٨	
		θ	٢,٤٢٤٩	-2.53387	٢,٨٤٦١٦	٠,٠١٢٩٦	
CME		α	٠,١٢١٤٦	-0.07854	٠.12806	٠,٠٠١٠١	
		λ	٠,٤٠٢٩١	-0.09709	٠,١٢٩٥٣	٠,٠٠٠٨٦	
		θ	٢,١٦٤٦٨	-2.59709	٢,٦٢٧٥٤	٠,٠٠٣٩٩	
150	MLE	α	٠,٢٠٨٥٨	٠,٠٠٨٥٨	٠,٠٦٠٥٦	٠,٠٠٠٠٤	
		λ	٠,٥٠٤٥٧	٠,٠٠٤٥٧	٠,٠٥٩٥٢	٠,٠٠٠٠٤	
		θ	3.02426	-2.49543	٢,٥١٢٥٣	٠,٠٠١٩٥	
	LS	α	٠,١١٠٨٦	-0.08914	٠,١١٧٩٣	٠,٠٠٠٠٥١	
		λ	٠,٤٠١٢١	-0.09879	٠,١٢٢٢	٠,٠٠٠٠٤٨	
		θ	٢,١٥٧٧٩	-2.59879	٢,٦٢٠٧٢	٠,٠٠٢٢٦	
	WLS	α	٠,٣٩٠٠١	٠,١٩٠٠١	١,٨٢٠٥٥	٠,٠١٢٠٧	
		λ	٠,٤٥٦٧	-0.0433	٠,٢٦١٨١	٠,٠٠١٧٢	
		θ	٢,٣٥٩٩٨	-2.5433	٢,٧٥٣٥٣	٠,٠٠٧٠٣	
	CME	α	٠,١١٠٩٥	-0.08905	٠,١١٨٠٥	٠,٠٠٠٠٥٢	
		λ	٠,٤٠١٢٣	-0.09877	٠,١٢٢٢٦	٠,٠٠٠٠٤٨	
		θ	٢,١٥٧٨٦	-2.59877	٢,٦٢٠٧٧	٠,٠٠٢٢٦	
200	MLE	α	٠,٢٠٥٤٣	٠,٠٠٥٤٣	٠,٠٥٢١٧	٠,٠٠٠٠٢٦	
		λ	٠,٥٠٤٥٢	٠,٠٠٤٥٢	٠,٠٥٣٢٤	٠,٠٠٠٠٢٧	
		θ	٣,٠٢٤١١	-2.49548	٢,٥٠٩٢١	٠,٠٠١٣١	
	LS	α	٠,١٠٤٣	-0.0957	٠,١١٠٩٤	٠,٠٠٠٠٢٨	
		λ	٠,٣٩٧٩٧	-0.10203	٠,١١٨٨٧	٠,٠٠٠٠٣	
		θ	٢,١٤١٥٣	-2.60203	٢,٦١٧٥٨	٠,٠٠١٤٢	

	WLS	α	٠,٣٤٦٣٥	٠,١٤٦٣٥	١,٤٧٩٨٥	٠,٠٠٧٣٦	
		λ	٠,٤٤٤٩١	-0.05509	٠,٢٣٦٢٩	٠,٠٠١١٥	
		θ	٢,٣٢١٤٧	-2.55509	٢,٧٣٥٧٦	٠,٠٠٤٨٩	
	CME	α	٠,١٠٣٤٦	-0.09654	٠,١١٠٩٥	٠,٠٠٠٢٧	
		λ	٠,٣٩٩٣٣	-0.10067	٠,١١٧٩٩	٠,٠٠٠٣١	
		θ	٢,١٤٧٨٧	-2.60067	٢,٦١٦٦١	٠,٠٠١٤٤	
	250	MLE	α	٠,٢٠٤٥	٠,٠٠٤٥	٠,٠٤٤٤٥	٠,٠٠٠١٨
			λ	٠,٥٠٢٢٨	٠,٠٠٢٢٨	٠,٠٤٥٤٤	٠,٠٠٠١٨
			θ	٣,٠١٢٨٧	-2.49772	٢,٥٠٨٠٣	٠,٠٠٠٩١
LS		α	٠,٠٩٩٤١	-0.10059	٠,١١٢٣	٠,٠٠٠٠٢	
		λ	٠,٣٩٩٢٢	-0.10078	٠,١١٤٢٦	٠,٠٠٠٢٢	
		θ	٢,١٤٣٧١	-2.60078	٢,٦١٣٠٩	٠,٠٠١٠١	
WLS		α	٠,٣٤٤٢٨	٠,١٤٤٢٨	٢,١٠٧٦٨	٠,٠٠٨٤١	
		λ	٠,٤٤٨٤٧	-0.05153	٠,٢٣٨١٢	٠,٠٠٠٩٣	
		θ	٢,٣٤٧٢٧	-2.55153	٢,٧٤٣٦٢	٠,٠٠٤٠٣	
CME		α	٠,٠٩٩٤٣	-0.10057	٠,١١٢٣٢	٠,٠٠٠٠٢	
		λ	٠,٣٩٩٢٤	-0.10076	٠,١١٤٢٨	٠,٠٠٠٢٢	
		θ	٢,١٤٣٧٥	-2.60076	٢,٦١٣١	٠,٠٠١٠١	
300	MLE	α	٠,٢٠٤٤١	٠,٠٠٤٤١	٠,٠٤١٤٣	٠,٠٠٠١٤	
		λ	٠,٥٠١٢٧	٠,٠٠١٢٧	٠,٠٤٢٢	٠,٠٠٠١٤	
		θ	٣,٠٠٦٧٤	-2.49873	٢,٥٠٧٥٦	٠,٠٠٠٠٧	
	LS	α	٠,٠٩٨٥٢	-0.10148	٠,١١٠٣٥	٠,٠٠٠١٤	
		λ	٠,٣٩٥٨٢	-0.10418	٠,١١٥٦	٠,٠٠٠١٧	
		θ	٢,١٢٨٠٩	-2.60418	٢,٦١٤٥١	٠,٠٠٠٧٧	
	WLS	α	٠,٢٧٥١٨	٠,٠٧٥١٨	٠,٧٥٧٦٤	٠,٠٠٢٥١	
		λ	٠,٤٣٥١٢	-0.06488	٠,٢٣٤٣٩	٠,٠٠٠٧٥	
		θ	٢,٢٧٥٩١	-2.56488	٢,٧٢٠٤٤	٠,٠٠٣٠٢	
	CME	α	٠,٠٩٨٥٤	-0.10146	٠,١١٠٣٦	٠,٠٠٠١٤	
		λ	٠,٣٩٥٨٢	-0.10418	٠,١١٥٦٢	٠,٠٠٠١٧	
		θ	٢,١٢٨٠٩	-2.60418	٢,٦١٤٥٢	٢,٦١٤٥٢	

جدول (3) متوسط التقديرات ومعايير الجودة لمعالم توزيع (ALTLx) في الحالة الثالثة
(set: 3 $\alpha = 0.3, \lambda = 1.9, \theta = 3.5$)

n	Methods		ME	Bias	RMSE	S.E
20	MLE	α	٠,٤٢٧٤١	٠,١٢٧٤١	٠,٤٥٨٣٨	٠,٠٢٢٠٢
		λ	٢,٠٣٢٠٧	٠,١٣٢٠٧	٠,٦٩٨٥٩	٠,٠٣٤٤٣
		θ	٣,٧٣٥١٩	-1.46793	١,٨١٥٧٨	٠,٠٥٣٤٤
	LS	α	٠,٦٩٧٢٥	0.39725	٢,٢٦١٨٤	٠,١١١٣٣
		λ	١,٦٣٤٥٧	-0.26543	٠,٨٦٢٨٥	٠,٠٤١٠٥
		θ	٢,٦٧٨	-1.86543	٢,١٩٥٩٤	٠,٠٥٧٩٣
	WLS	α	٥,٦٥٠٩١	5.35091	٩٠,٤٣٩٥	٤,٥١٤٠٥
		λ	١,٩٢٣٩٦	0.02396	١,٩٧٥٣٨	٠,٠٩٨٧٦
		θ	٣,٠٩١٧١	-1.57604	٣,٠٨٤٩٧	٠,١٣٢٦٦
	CME	α	٠,٨٣٩٧٢	0.53972	٤,٧٣٨٩	٠,٢٣٥٤٤
		λ	١,٦٧٠٣٦	-0.22964	١,٠٢٧٦٦	٠,٠٥٠٠٨
		θ	٢,٧٨٣٣٣	-1.82964	٢,٣٤٧١	٠,٠٧٣٥١
50	MLE	α	٠,٣٤٩٧٦	٠,٠٤٩٧٦	٠,١٩٧٣٦	٠,٠٠٣٨٢
		λ	١,٩٣١٩٤	٠,٠٣١٩٤	٠,٣٩٥٥١	٠,٠٠٧٨٨
		θ	3.56022	-1.56806	١,٦٨٢٦٤	٠,٠١٢٢١
	LS	α	٠,٣٤٦٧٨	٠,٠٤٦٧٨	٠,٨٢٣٦١	٠,٠١٦٤٥
		λ	١,٥٢٢٠١	-0.37799	٠,٦١٤٦٨	٠,٠٠٩٦٩
		θ	٢,٥٥١١٣	-1.97799	٢,٠٩٨٨٩	٠,٠١٤٠٤
	WLS	α	١,٢٦٦٦٦	٠,٩٦٦٦٦	٩,٣٨٧٩٢	٠,١٨١٧٦
		λ	١,٨٥٦٦٢	-0.04338	١,٧٠٨٠٥	٠,٠٢٤١٥
		θ	٢,٩٥٢٨٥	-1.64338	٢,٨٧٣٦٨	٠,٠٤٧١٥
	CME	α	٠,٣٥٠٦٢	٠,٠٥٠٦٢	٠,٨٥١٤٤	٠,٠١٧٠١
		λ	١,٥٢٢٦٦	-0.37734	٠,٦١٦٩٨	٠,٠٠٩٧٦
		θ	٢,٥٥١٩٣	-1.97734	٢,٠٩٩٩٣	٠,٠١٤١٤
100	MLE	α	٠,٣٢٠٩٨	0.02098	٠,١١٤٥٤	٠,٠٠١١٣
		λ	١,٩٢١٠٥	٠,٠٢١٠٥	٠,٢٦٣٢٥	٠,٠٠٢٦٢
		θ	٣,٥٣٩٣٥	-1.5785	١,٦٢٩٠٩	٠,٠٠٤٠٣
	LS	α	٠,٢٢١٩٣	-0.07807	٠,٢٠٨٨٨	٠,٠٠١٩٤
		λ	١,٤٩٨١٣	-0.40187	٠,٥٠٠١٣	٠,٠٠٢٩٨
		θ	٢,٥٢٠٦٥	-2.00187	٢,٠٤٨٥١	٠,٠٠٤٣٥
	WLS	α	٠,٧٧٣٢	٠,٤٧٣٢	٣,٧٤٥٣٧	٠,٠٣٧١٥
		λ	١,٧١٦٢	-0.1838	١,٠٧٢٠٩	٠,٠١٠٥٦
		θ	٢,٨٠٠٠٧	-1.7838	٢,٢٧٤٩٣	٠,٠١٤١٢
	CME	α	٠,٢٢٢٢٦	-0.07774	٠,٢٠٩٥٧	٠,٠٠١٩٥
		λ	١,٤٩٨٢٨	-0.40172	٠,٥٠٠٤٨	٠,٠٠٢٩٨
		θ	٢,٥٢٠٠٨	-2.00172	٢,٠٤٨٦٦	٠,٠٠٤٣٦
150	MLE	α	٠,٣١٢٣٢	0.01232	٠,٠٨٩٤٣	٠,٠٠٠٥٩
		λ	١,٩١٦١٦	٠,٠١٦١٦	٠,٢١٢٨٢	٠,٠٠١٤١
		θ	٣,٥٢٦٣٧	-1.58384	١,٦١٦٧٣	٠,٠٠٢١٦
	LS	α	٠,٢٠١١٦	-0.09884	٠,١٧٣٢٤	٠,٠٠٠٩٥
		λ	١,٤٩٢٩٧	-0.40703	٠,٤٧٨٤٩	٠,٠٠١٦٨
		θ	٢,٥١٣٨٣	-2.00703	٢,٠٤٠٨٤	٠,٠٠٢٤٧
	WLS	α	٠,٦٤٦٣	٠,٣٤٦٣	٢,٨٣٣٥٩	٠,٠١٨٧٥
		λ	١,٦٧٧٨٦	-0.22214	٠,٩١٩٣	٠,٠٠٠٥٩
		θ	٢,٧٢٥٢	-1.82214	٢,١٥١٦	٠,٠٠٧٦٣

200	CME	α	٠,٢٠١٣	-0.0987	٠,١٧٣٥٨	٠,٠٠٠٩٥
		λ	١,٤٩٣٠٣	-0.40697	٠,٤٧٨٦٧	٠,٠٠١٦٨
		θ	٢,٥١٣٩	-2.00697	٢,٠٤٠٩	٠,٠٠٢٤٧
	MLE	α	٠,٣٠٧٨٢	0.00782	٠,٠٧٧٤٨	٠,٠٠٠٣٩
		λ	١,٩١٥٩٦	٠,٠١٥٩٦	٠,١٩٠٤٦	٠,٠٠٠٩٥
		θ	٣,٥٢٦١٧	-1.58404	١,٦١٠٥	٠,٠٠١٤٥
	LS	α	٠,١٨٩٢٧	-0.11073	٠,١٥٠٩٢	٠,٠٠٠٥١
		λ	١,٤٨٦٤٩	-0.41351	٠,٤٦٥٩٧	٠,٠٠١٠٧
		θ	٢,٥٠٣٢	-2.01351	٢,٠٣٨٠٤	٠,٠٠١٥٨
WLS	α	٠,٥٩٥٤٢	٠,٢٩٥٤٢	٢,٣٦٣٨٥	٠,٠١١٧٣	
	λ	١,٦٤١٣٧	-0.25863	٠,٨٤٦٦	٠,٠٠٤٠٣	
	θ	٢,٦٨٣١٦	-1.85863	٢,١٤٠٢٤	٠,٠٠٥٣١	
CME	α	٠,١٨٩٣٦	-0.11064	٠,١٥١٠٤	٠,٠٠٠٥١	
	λ	١,٤٨٦٥	-0.4135	٠,٤٦٦٠٩	٠,٠٠١٠٨	
	θ	٢,٥٠٣٢١	-2.0135	٢,٠٣٨٠٩	٠,٠٠١٥٨	
250	MLE	α	٠,٣٠٦٥٩	0.00659	٠,٠٦٦٠٨	٠,٠٠٠٢٦
		λ	١,٩٠٧٩٧	0.00797	٠,١٦٢٩٤	٠,٠٠٠٦٥
		θ	٣,٥١٣٧٤	-1.59203	١,٦١١٩	٠,٠٠١٠١
	LS	α	٠,١٨٠٩٧	-0.11903	٠,١٥١١٥	٠,٠٠٠٣٧
		λ	١,٤٨٥٩٣	-0.41407	٠,٤٥٥٠٢	٠,٠٠٠٧٥
		θ	٢,٤٩٨٧	-2.01407	٢,٠٣٣١	٠,٠٠١١١
	WLS	α	٠,٦٣٤٨٨	٠,٣٣٤٨٨	٣,٣٦٢٤٩	٠,٠١٣٣٨
		λ	١,٦٥٠٥٤	-0.24946	٠,٨٣٨٧٤	٠,٠٠٣٢
		θ	٢,٧١٣٤	-1.84946	٢,١٥٠٥٤	٠,٠٠٤٣٩
CME	α	٠,١٨١٠١	-0.11899	٠,١٥١٢٢	٠,٠٠٠٣٧	
	λ	١,٤٨٥٩٧	-0.41403	٠,٤٥٥٠٧	٠,٠٠٠٧٦	
	θ	٢,٤٩٨٧٤	-2.01403	٢,٠٣٣١	٠,٠٠١١١	
300	MLE	α	٠,٣٠٩٣٦	0.00936	٠,٠٦٣١٦	0.00021
		λ	١,٨٩٩٨٦	-0.00014	٠,١٤٨١٦	٠,٠٠٠٤٩
		θ	٣,٥٠٢٥٣	-1.60014	١,٦١٦٣٢	٠,٠٠٠٧٦
	LS	α	٠,١٨٤٨٩	-0.11511	٠,١٤٢٣٣	٠,٠٠٠٢٨
		λ	١,٤٦٢١١	-0.43789	٠,٤٦٨٥١	٠,٠٠٠٥٦
		θ	٢,٤٦٦٥٦	-2.03789	٢,٠٥٢١٢	٠,٠٠٠٠٨
	WLS	α	٠,٤٦٦٥١	٠,١٦٦٥١	١,٠٧٩٣٣	٠,٠٠٣٥٥
		λ	١,٥٧٠٢٩	-0.32971	٠,٧٢٨٧١	٠,٠٠٢١٧
		θ	٢,٦١٨١	-1.92971	٢,١٤٩٩٨	٠,٠٠٣١٦
CME	α	٠,١٨٤٩٢	-0.11508	٠,١٤٢٣٦	٠,٠٠٠٢٨	
	λ	١,٤٦٢١	-0.4379	٠,٤٦٨٥٧	٠,٠٠٠٥٦	
	θ	٢,٤٦٦٥٤	-2.0379	٢,٠٥٢١٦	٠,٠٠٠٠٨	

Improving the Goodness of Fit for Some Lifetime Data Using a New Probability Distribution

Hajar Rabeai Hegazy; Dr. Mohamed Ibrahim and Dr. Amal Mubarak

Abstract:

This study aims to introduce a new generalization of Lomax distribution (Lx) that can fit the data of many life phenomena with higher accuracy compared with Lomax generalizations.

This study aims to present a new generalization for Lomax distribution (Lx) through using α Logarithmic Transformed Family of Distributions (αLT), to generate a new distribution referred to as α Logarithmic Transformed Lomax distribution, Also, some of statistical characteristics of the new generalization were studied and distribution parameters were estimated by using four different estimation methods which are Maximum Likelihood, Least squares, Weighted Least Squares and Cramer-von-Mises Methods. and a simulation study was conducted to evaluate the performance of the estimators.

Moreover, two sets of real data were used in the study, the first set of data includes 34 observations of Vinyl chloride's data obtained through monitoring the cleaning of groundwater wells. These data have been used in many studies of the Lomax distribution. The second set of data consists of a group of data of the failure times of a random sample of 60 patients with double pneumonia and Covid-19, the data was obtained from Al-Sadr Hospital in Damietta and cover the period ranges from 2/6/2020 to 19/9/2020 to show the flexibility of the new generalization compared with some other generalizations of the Lomax distribution, using some statistical measures.

Keywords:

Lomax distribution - α Logarithmic Transformed Family - Ordinary Moments - Incomplete Moments - Order statistics - Maximum Likelihood Method - Least squares Method - Weighted Least Squares - Cramer-von-Mises Method - Lifetime data.