



## استخدام بعض طرق الشرائح لتمهيد معدلات الوفاة الخام بجدول الاكتواري المصري

إعداد

د. السيد الشربيني الأشقر  
أستاذ مساعد بقسم العلوم الإدارية  
كلية المجتمع بجامعة الملك سعود  
مدرس بقسم الإحصاء التطبيقي والتأمين  
كلية التجارة - جامعة المنصورة

[sayed\\_alashkar@mans.edu.eg](mailto:sayed_alashkar@mans.edu.eg)

المجلة العلمية للدراسات والبحوث المالية والتجارية

كلية التجارة - جامعة دمياط

المجلد الرابع - العدد الأول - الجزء الرابع - يناير ٢٠٢٣

التوثيق المقترح وفقاً لنظام APA:

الأشقر، السيد الشربيني (٢٠٢٣). استخدام بعض طرق الشرائح لتمهيد معدلات الوفاة الخام بجدول الاكتواري المصري. المجلة العلمية للدراسات والبحوث المالية والتجارية، كلية التجارة، جامعة دمياط، ٤(١)٣، ٥٤٧-٥٢١.

رابط المجلة: <https://cfdj.journals.ekb.eg/>

## استخدام بعض طرق الشرائح لتمهيد معدلات الوفاة الخام بجدول الاكتواري المصري

د. السيد الشربيني الأشقر

### الملخص:

تعتبر عملية تهذيب وتمهيد معدلات الوفاة بعد حسابها خطوة رئيسية عند إنشاء الجداول الاكتوارية. وتهدف هذه الدراسة إلى تقديم بعض طرق شرائح التمهيد ودوال الأساس الشائعة - مثل: الشرائح التكعيبية Cubic splines، شرائح الأساس (B-Splines)، الشرائح التكعيبية الطبيعية Natural cubic splines، الشرائح الجزائية (P-splines) -، ثم المقارنة بين هذه الطرق، للوصول إلى معدلات وفاة مسواة وممهدة للمؤمن عليهم بشركات التأمين المصرية خلال الفترة من ٢٠٠٧-٢٠١٠. وأشارت النتائج إلى أن جميع الطرق المستخدمة قدمت نتائج مقبولة من حيث الدقة والسلاسة، ما عدا طريقة الشرائح التكعيبية الطبيعية عند استخدام ٣ عقد، وأن طريقة شرائح الأساس (B-Splines) عند استخدام عدد ٣ عقد في الحالة الأولى كانت الأفضل - مقارنة بباقي الطرق. وتمت التوصية بدراسة مدى ملاءمة تطبيق شرائح التمهيد المعروضة في هذا البحث في حالة مجتمعات أخرى، وفي حالة العينات الكبيرة، ودراسة المزيد من طرق الشرائح المختلفة والمتعددة، والاستمرار في استكشاف ومحاكاة الأساليب والطرق الحديثة للتمهيد أو التسوية وتطبيقها. وكذلك العمل على توفير وإتاحة البيانات الخاصة بالوفيات على مستوى مجتمع المؤمن عليهم بشركات التأمين المصرية.

**الكلمات المفتاحية:** التسوية - شرائح التمهيد - الشرائح التكعيبية - الشرائح التكعيبية الطبيعية -

شرائح الأساس - الشرائح الجزائية

## 1. مقدمة:

تعد عملية تسوية (تدريج، تمهيد) معدلات الوفيات موضع اهتمام الكثيرين في صناعة التأمين على الحياة، وواحدة من المهام الهامة في العلوم الاكتوارية، فهي ببساطة عبارة عن عملية إيجاد تقديرات للبيانات الخام، سواء عدد المعرضين للخطر وعدد الوفيات أو معدلات الوفاة، بطريقة تُظهر هذه التقديرات مسواة ومهذبة ومهذبة وفي نفس الوقت متسقة مع البيانات الأصلية. وهناك طرق عديدة لتسوية أو تدريج معدلات الوفاة، لكن، بشكل عام، يمكن تصنيفها إلى ثلاث فئات رئيسية: التسوية بالرجوع إلى جدول معياري، التسوية البيانية، والتسوية باستخدام الصيغ الرياضية. وللتسوية باستخدام الصيغ الرياضية أشكال متعددة، ففي العلوم الاكتوارية، وتحديدًا تمهيد معدلات الوفاة، هناك مجموعة من الأساليب التي يمكن استخدامها منها ما يعتمد على معادلات رياضية أو صيغ لأمعلمية ومنها ما يعتمد على توفيق بعض أنواع التوزيعات الاحتمالية، ومن أمثلة ذلك: الصيغ القائمة على القيم المحورية والاستكمال، المتوسطات المتحركة، المنحنيات والتوزيعات الاحتمالية، بعض الصيغ الرياضية الخاصة، حيث هناك مجموعة كبيرة من الصيغ الرياضية المقترحة التي يمكن استخدامها في تسوية معدلات الوفاة، يعتمد أغلبها على نماذج انحدار لأمعلمية أو على طرق التحليل الرياضي، مثل طريقة Whittaker-Henderson، والمدخل التبايني لتمهيد البيانات، وشرائح التمهيد smoothing splines... وغيرها.

تطورت شرائح التمهيد، والتي تعد أحد نماذج الانحدار اللامعلمية، خلال الفترة الزمنية الماضية وأصبحت موضوعاً هاماً للدراسة، فعلى سبيل المثال أدى البحث عن مصطلح "smoothing splines" في المواقع الإلكترونية على سبيل المثال لا الحصر - ScienceDirect و Wiley Online Library - إلى نتائج 1365 3365 مقالة وكتاب على التوالي وذلك يوم 2020/08/25 ولسنة ماضية، مما يدل على أن شرائح التمهيد مهمة لسببين: أولاً إدراك الإحصائيين بأن التقدير المعلمي البحث في تقدير وتمهيد منحنى الانحدار لا يتوافق مع الحاجة إلى المرونة

في تحليل البيانات والسبب الثاني يعود إلى تطور أجهزة الحاسب الآلي سواء مادياً أو برمجياً (Hardware & Software) مما مكن الباحثين من تطوير الجانب النظري لحساب المقدرات اللامعلمية لشرائح التمهيد وبذلك فقد أصبح من الممكن استخدام شرائح التمهيد في عدة اختصاصات منها العلوم الإكتوارية، والعلوم الحيوية، الطب، الهندسة، وعلوم الحاسب، الاقتصاد القياسي والرياضيات... وغيرها.

## 2. هدف وحدود البحث:

تهدف هذه الدراسة إلى الوصول لمعدلات وفاة مسواة وممهدة لمعدلات الوفاة الخام للمؤمن عليهم بشركات التأمين المصرية خلال الفترة من ٢٠٠٧ - ٢٠١٠ (Mohamed, A, 2010)، وذلك باستخدام بعض طرق شرائح التمهيد ودوال الأساس الشائعة مثل الشرائح التكعيبية Cubic splines، شرائح الأساس Base splines (B-Splines) الشرائح التكعيبية الطبيعية Natural cubic splines، الشرائح الجزائية Penalized splines (P-splines)، ثم المقارنة بين هذه الطرق.

## 3. أهمية البحث:

تتمثل أهمية هذه الدراسة في إثراء المكتبة العربية في موضوعات الإحصاء الإكتواري، وتحديد أساليب وطرق تهذيب وتدرج البيانات، وذلك من خلال تقديم بعض طرق الشرائح ودوال الأساس الأكثر استخداماً وشيوعاً التي لم يتم تناولها كثيراً في الدراسات العربية، ولم يسبق تطبيقها على معدلات الوفاة الخام بجدول الحياة الإكتواري المصري خلال فترة الدراسة (على حد علم الباحث).

## 4. الدراسات السابقة:

هناك أساليب مختلفة ومتعددة في الإحصاء اللامعلمي تهدف جميعها إلى حل مشكلة واحدة وهي الوصول إلى أدق تنبؤ لقيم المتغير التابع بمعلومية القيم السابقة

---

---

له وكذلك قيم بعض المتغيرات المستقلة، مثل شرائح الانحدار regression splines (Wood, 2017)، وشرائح التمهيد (Green & DIERCKX, 1993; ) (B-Splines)، شرائح الأساس (Silverman, 1993)، وشرائح الجزائية (P-splines) (Marx and Eilers, 1996)، والنماذج المضافة المعممة generalized additive models (Hastie and Tibshirani, 1987, 1990).

وهناك العديد من الدراسات التي تناولت الانحدار اللامعلمي، فعلى سبيل المثال لا الحصر: تمهيد معدلات الوفيات والتنبؤ بها باستخدام الشرائح الجزائية (P-splines) (Currie & Durban, 2002)، التنبؤ بالطلب على الكهرباء باستخدام شرائح الزمن المتغير (Harvey & Koopman, 1993)، والتنبؤات الخطية باستخدام شرائح التمهيد التكيفية (Hyndman, King, Pitrun, & Billah, 2005)، التنبؤ بهطول الأمطار باستخدام نماذج برمجة الحاسب وخطوط الانحدار التكيفية متعددة المتغيرات (Abraham, Steinberg, & Philip, 2001)، تطبيق شرائح الانحدار التكيفية متعددة المتغيرات لمحاكاة درجة حرارة التربة (Yang, Prasher, Lacroix, & Kim, 2004).... إلخ.

فقد قامت دراسة (Eilers & Marx, 1996) بتقديم لمحة موجزة عن شرائح الأساس (B-splines)، وكيفية بنائها ومدى قابليتها لوضع قيود جزائية، كما ناقشت خصائص الشرائح الجزائية (P-splines) واقتراح معايير مختلفة لاختيار معلمة الجزائية المثلى، كاختيار العدد الأمثل ومواقع العقد، وتم استخدام الانحدار اللوجستي اللامعلمي وتقدير الكثافة والتمهيد باستخدام شكل الانتشار كأمثلة.

أخذت دراسة (Currie & Durban, 2002) في الاعتبار تطبيق الشرائح الجزائية P-splines على ثلاث فئات من نماذج مكونات التمهيد: النماذج شبه المعلمية، والنماذج ذات الأخطاء المتسلسلة، والنماذج ذات الأخطاء غير

---

---

المتجانسة، وقامت الدراسة بوضع إستراتيجية غير معلمية بسيطة لاختيار معلمات P-spline (عدد العقد، ودرجة P-spline، وترتيب الجزائية) واستخدمت طرق النموذج المختلط (REML) لتمهيد تلك المعلمات.

أوضحت دراسة (Currie, Durban, & Eilers, 2004) كيفية استخدام طريقة الشرائح الجزائية P-splines لتمهيد جداول الوفيات ثنائية الأبعاد والتنبؤ بها. واستخدمت نموذجاً خطياً معمماً جزائياً بأخطاء تتبع توزيع بواسون وكيفية بناء مصفوفات الانحدار والجزاءات المناسبة للنمذجة ثنائية الأبعاد، بالتطبيق على مجموعتين من البيانات من مكتب تحقيقات الوفيات المستمرة في المملكة المتحدة.

وتناولت دراسة (رشيد و خمو، 2005) بعض طرق شرائح التمهيد، الطريقة الشرائحية مع عقد مكيفة (التمهيد الخطي القطعي Piecewise Linear Smoothing، المطابقة التكميبيبة Piecewise Cubic Fitting) وطريقة الجزاء غير الممهدة القطعية Roughness Penalty، المتعلقة بتمهيد دوال الانحدار اللامعلمي بهدف إيجاد أفضل طريقة.

استعرضت دراسة (Debón, Montes, & Sala, 2006) مقارنة لبعض الطرق اللامعلمية لتسوية معدلات الوفاة، التمهيد اللبي Kernel Smoothing وشرائح التمهيد والانحدار الموضوعي المرجح Locally-weighted Regression (LOESS) والنماذج المضافة المعممة Generalized Additive Models (GAM)، وتطبيقها على بيانات الوفيات بمنطقة فالنسيا بإسبانيا. وأوصت هذه الدراسة بإمكانية تطبيقها على بيانات الوفيات لمجموعة واسعة من الفئات العمرية في أي منطقة جغرافية أخرى، وقد قامت دراسة (البلقيني، طاقية، & درغام، 2013) باستخدام نفس الطرق وتطبيقها على البيانات الديموغرافية المصرية للوصول إلى معدلات الوفاة المسواة، والمقارنة بين هذه الطرق للوصول الي أفضل طريقة لتسوية معدلات الوفاة الخام. حيث توصلت

---

---

الدراسات إلى أن طريقة التسوية باستخدام النماذج المضافة المعممة كانت أفضل الطرق اللامعلمية محل البحث لتسوية معدلات الوفاة الخام.

قامت دراسة (Aydin, 2007) بمقارنة بين نموذجين من الانحدار اللامعلمي، شريحة التمهيد والانحدار اللبي Kernel Regression، باستخدام مجموعتين من البيانات، الأولى عن الناتج القومي الإجمالي في تركيا والثانية عن بيانات ستانفورد لعمليات زراعة القلب، وتوصلت الدراسة إلى أن طريقة شريحة التمهيد أفضل من طريقة الانحدار اللبي.

قامت دراسة (Nizamitdinov, Memmedli, & Ozdemir, 2010) بإجراء مقارنة بين طريقة P-splines والنموذج الإضافي وحيد المتغير (شريحة التمهيد التكعيبية) باستخدام مجموعة بيانات لسعر صرف الليرة التركية (TL) مقابل اليورو خلال 2005-2009 وسعر الذهب خلال 2000-2009. وتوصلت هذه الدراسة إلى أن طريقة نموذج P-spline أفضل من النموذج الإضافي وحيد المتغير.

تناولت دراسة (محمد حبيب & حافظ محمد، 2011) مقارنة بين بعض طرق تمهيد الانحدار اللامعلمية، حيث تمت المقارنة بين أربعة أنواع منها وهي مقدر N-W، مقدر الانحدار الخطي الموضوعي Local Linear Estimator، الشريحة الممهدة، وانحدار الشرائح الجزائية Penalized Spline Regression، لإيجاد أفضل مقدر من بين مقدرات التمهيد المذكورة لتمثيل البيانات المدروسة بناء على نتائج تجارب المحاكاة وقد توصلت الدراسة إلى أن الطرق الشرائحية أفضل من الطرق اللبية Kernel في تمهيد منحنى الانحدار اللامعلمي.

قارنت دراسة (الصفراوي & متي، 2011) بين ثلاث طرق تمهيدية، طريقة الدالة اللبية Kernel Function Method وطريقة الجار الأقرب K-Nearest Neighbor وطريقة شرائح التمهيد، باستخدام أسلوب المحاكاة بنموذجين مختلفين

---

---

و ثلاث قيم للتباين. واقترحت دراسة (Luoma, Puustelli, & Koskinen, 2012) طريقة جديدة لنمذجة الوفيات ثنائية الأبعاد، باستخدام طريقة شرائح التمهيد البيزي لتسوية مجموعة البيانات في أبعاد المجموعة والعمر.

تناولت دراسة (حسن & مجيد، 2016) استخدام بعض طرق التمهيد، التمهيد اللبي الموضوعي وانحدار الشريحة والشريحة الجزائية وذلك للوصول إلى أفضل مقدر لتمثيل البيانات، بالتطبيق على بيانات سوق العراق للأوراق المالية. وفي دراسة (McCormack, 2017) تم تسوية معدلات الوفيات الخام باستخدام طريقة حديثة وأكثر دقة من الناحية الإحصائية، شرائح التمهيد التكعيبية التي تعتمد على منهجية B-Spline، بغرض إنشاء جدول الحياة الأيرلندي، رقم 16، (ILF16)، الذي يغطي الفترة 2010-2012.

اقترحت دراسة (Goicoa, Adin, Etxeberria, Militino, & Ugarte, 2019) استخدام نماذج العمر - المكان - الزمن المبنية على P-spline الأحادية والثنائية الأبعاد مع B-spline لتمهيد معدلات الوفاة، باستخدام بيانات وفيات سرطان الثدي الإسبانية خلال الفترة 1985-2010.

ناقشت دراسة (Andersen & Chen, 2020) تطبيقات الشرائح اللبية smoothing spline kernel، بما في ذلك انحدار شرائح التمهيد regression، وانحدار العملية العشوائية الطبيعية Gaussian process regression، وبعض مشكلات تقدير المعلمات لهذه النماذج. واستخدمت دراسة (Kuchibhotla & Patra, 2020) شرائح التمهيد لتقدير دالة الربط الممهدة، على عكس النهج التقليدي لاستخدام الشرائح اللبية وشرائح الانحدار، وطورت الدراسة طريقة لحساب مقدرات المربعات الصغرى الجزائية (PLSEs) للمكونات المعلمية واللامعلمية التي تعطى بيانات مستقلة وموزعة بشكل متماثل، وذلك بتحليل مجموعة بيانات المسافة المقطوعة بالميل للسيارات ومجموعة بيانات تركيز الأوزون.



قامت دراسة (Purnama, 2020) بالمقارنة بين طريقة شرائح التمهيد وشرائح الأساس للوصول لأفضل نمط ممهد لوصف العلاقة بين الوقت وعدد ركاب القطار في جزيرة سومطرة، وتوصلت هذه الدراسة إلى أن طريقة شرائح التمهيد أكثر ملاءمة.

قامت دراسة (زايد & الأشقر، 2020) بالمقارنة بين بعض طرق التسوية، المدخل التبايني لتمهيد البيانات وطريقة واتكر-هندرسون (حيث تقوم هذه الطريقة على أساس شرائح التمهيد المنفصلة discrete smoothing splines للبيانات ذات المسافات المتساوية) ونموذج ماكبيهام والنماذج الأسية، بالتطبيق على معدلات الوفاة بجدول الحياة المختصر للسكان في جمهورية مصر العربية.

مما سبق من دراسات سابقة نجد أهمية شرائح التمهيد، خلال الفترة الزمنية الماضية وكذلك الحالية والتي أصبحت من الموضوعات الهامة للبحث والدراسة.

#### 5. منهجية البحث:

تعتمد هذه الدراسة على منهج وصفي تحليلي للمقارنة بين بعض طرق الشرائح ودالة الأساس الشائعة لتسوية معدلات الوفاة بالتطبيق على معدلات الوفاة الخام للمؤمن عليهم بشركات التأمين المصرية خلال الفترة من ٢٠٠٧ - ٢٠١٠.

طرق شرائح التمهيد ودوال الأساس الشائعة:

#### تعريف الشرائح Definition of splines

لأي دالة  $f(X)$  ومجموعة من النقاط أو العقد  $(\tau_1 < \dots < \tau_k)$  في نطاق  $X$ ، يمكن تعريف الشريحة spline من الناحية الإحصائية على أنها دالة ممهدة كثيرة الحدود من درجة محددة  $d$  ومشتقاتها ذات الرتب أقل من  $d$  متصلة أو مستمرة (معيار النعومة أو التمهيد). وأحياناً يتم فرض مجموعة من القيود الإضافية عند النقاط أو العقد الواقعة في أطراف نطاق الدالة مثل أن تكون المشتقات من الرتبة 2 أو أكبر تساوي الصفر، وفي مثل هذه الحالات؛ تُعرف الشرائح مع هذا القيد

الإضافي بالشرائح "المقيدة" أو "الطبيعية". وللوصول إلى منحنيات أكثر نعومة، يمكن زيادة عدد العقد أو درجة كثيرة الحدود، مع مراعاة أن تقليل عدد العقد قد يؤدي إلى منحنى غير ممهد وتقديرات ذات تحيز أكبر والعكس صحيح.

ويمكن تمثيل شرائح التمهيد باستخدام دوال الأساس، فإذا افترضنا أن الدالة غير المعروفة  $f$  هي كثيرة حدود ذات درجة محددة  $d$  يتم تمثيلها بدلالة مجموعة متسلسلة من العقد، ويمكن صياغتها كما يلي:

$$f(X) = \sum_{k=1}^{k+d+1} \beta_k B_k(X), \quad (1)$$

حيث  $B_k$  هي مجموعة من دوال الأساس و  $\beta_k$  هي معاملات الدالة وعددها  $(d+k+1)$  بشكل عام و  $k$  في حالة الشرائح الطبيعية (Wood, 2017).

ونظرًا لأن  $(\beta B = (BA)(A^{-1}B) = \gamma B^*)$  لأي مصفوفة قابلة للانعكاس  $A$ ، فهناك عدد لا نهائي من مجموعات دوال الأساس لتقدير الشريحة. والتعبير رقم (1) هو خطي في متجه المعلمات  $(\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{k+d+1}))$ ، لذلك يمكن النظر إلى تقدير  $f$  على أنه مشكلة تحسين خطية في المتغيرات المحولة  $(\beta_1(X), \dots, \beta_{k+d+1}(X))$ ، مما يسمح باستخدام أساليب التقدير المتعارف عليها لتوفيق الشرائح في نماذج انحدار معمة متعددة المتغيرات يتم فيها تقدير مجموعة محدودة من المعلمات تُعرّف الدالة  $f$ .

وتتميز نمذجة الشرائح بمرونة عالية ترجع بشكل أساسي إلى التنوع في اختيار كل من دوال الأساس  $B$  ودرجة كثيرة الحدود  $d$  (Harrell Jr, 2015; Wood, 2017). وفي أغلب الأحوال، يعتبر منحنى شرائح التمهيد مقبولاً من حيث درجة النعومة أو السلاسة عند استخدام كثيرة حدود تكعيبية أو من الدرجة الثالثة ( $d=3$ )، بينما يكون منحنى التمهيد باستخدام ( $d=1$ ) أو ( $d=2$ ) له خصائص إحصائية مطابقة تقريباً لحالة ( $d=3$ ) ولكن يكون أكثر خشونة (أقل تمهيداً). وبالإضافة إلى نوع دوال الأساس ودرجة منحنى التمهيد، يعتبر اختيار

عدد العقد والتباعد بينها واستخدام (أو عدم استخدام) دالة جزء من العوامل المؤثرة في التمهيد. وفي حالة عدم وجود جزء، لا يقتضي الأمر أي تعديلات على نموذج الانحدار الأساسي وطرق تقدير المعلمات، وغالباً ما يشار إلى هذا النهج باسم "شرائح الانحدار" حيث تعتمد مرونة دالة الانحدار غير الخطية بالكامل على عدد العقد. من ناحية أخرى، يتطلب إدراج أي مكونات أو دوال جزء على منحنى الشرائح أن يتم تعديل نموذج الانحدار، حيث يجب تضمين كل من دوال الجزء في نموذج انحدار منفصل، وفي هذه الحالة قد يكون لشرائح التمهيد الناتجة العديد من الخصائص المرغوبة، ولكن أحياناً قد يمثل هذا التعقيد الإضافي لدالة التمهيد صعوبات عند التطبيق العملي.

هناك العديد من الخيارات لتعريف دوال الأساس  $\beta_k$  تختلف فيما يتعلق بخصائصها العددية (Boor, 2001; Wood, 2017) وفيما يلي، سوف نقدم بعضاً من دوال الأساس شائعة الاستخدام في شرائح التمهيد، وهي الشرائح التكعيبية cubic splines، شرائح الأساس B-splines، الشرائح التكعيبية الطبيعية natural cubic splines، والشرائح الأصلية أو الرئيسية cardinal splines. وغالباً ما يشار إلى أنواع شرائح التمهيد السابقة باسم شرائح الانحدار.

### (أ) الشرائح التكعيبية Cubic splines

تعتمد الشرائح التكعيبية على ما يطلق عليها "سلاسل القوى المبتورة" truncated power series، والتي يتم تحديدها من خلال دالة الأساس التالية:

$$B_{i+1}(x) = \begin{cases} x^i, & i = 0, 1, \dots, d \\ (x - \tau_{i-d})_+^d, & i = d + 1, d + 2, \dots, d + k \end{cases} \quad (2)$$

حيث يُعرّف الجزء الأول من الصيغة السابقة دوال الأساس حتى كثيرة الحدود من الدرجة  $d$ ، وبعدها تتم إضافة الانحرافات عن العقد المتتالية من الدرجة  $d$  إلى دالة الشريحة على يمين كل عقدة  $k$  (الجزء الثاني من الصيغة). وتكون

الشريحة ذات دالة أساس القوة المبتورة قابلة للتفاضل  $(d-1)$  مرة عند العقد ولها درجات حرية  $(d+k)$ .

ويتم تكوين الشرائح التكعيبية باستخدام كثيرة حدود من الدرجة الثالثة في الفترة بين كل عقدتين متتاليتين. وفي كل فترة من الفترات، وعددها  $(K+1)$ ، تحتوي الشريحة على أربع معلمات، وعند كل عقدة توجد ثلاثة قيود، وبالتالي يكون لمنحنى الشرائح التكعيبية  $(K+4)$  من درجات الحرية، فمثلا سيكون لدالة الشريحة التكعيبية بثلاث عقد  $(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$  سبع درجات حرية.

وباستخدام الصيغة رقم (2) والتعريف السابق لدوال الأساس، يمكن التعبير عن دالة الشريحة التكعيبية على النحو التالي:

$$f(X) = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 X^2 + \beta_3 X^3 + \beta_4 (X - \tau_1)^3 + \beta_5 (X - \tau_2)^3 + \beta_6 (X - \tau_3)^3 \quad (3)$$

### (ب) الشرائح التكعيبية الطبيعية Natural cubic splines

تتأثر الشرائح التكعيبية بإحداثيات النقاط الواقعة عند العقد الحدودية، وفي بعض الأحيان يمكن أن تكون الشريحة غير منتظمة أو ممهدة عند حدود البيانات. ولمعالجة هذه المشكلة، تستخدم الشرائح الطبيعية، وهي عبارة عن شرائح تكعيبية لها قيود إضافية تتمثل في أنها خطية عند ذيول العقد الحدودية  $(-\infty, a], [b, +\infty)$ . ويتم تحقيق ذلك من خلال اشتراط أن تكون  $(f'' = f''' = 0)$  في الفترة  $(-\infty, a], [b, +\infty)$ ، ويضيف الشرط السابق قيودا إضافية على دالة الشرائح حيث يكون لها في هذه الحالة  $K+1$  من درجات الحرية.

### (ج) شرائح الأساس (B-Splines) Base splines

تعتبر شرائح الأساس من أنواع شرائح التمهيد الأساسية شائعة الاستخدام، وتعتبر حالة خاصة من الشرائح التكعيبية. وتعتمد شرائح الأساس على متتالية العقد:

$$\xi_1 \leq \dots \leq \xi_d \leq \xi_{d+1} < \xi_{d+2} < \dots < \xi_{d+K+1} < \xi_{d+K+2} \leq \xi_{d+K+3} \leq \dots \leq \xi_{2d+K+2},$$

حيث:

$$(\xi_{d+2} := \tau_1, \dots, \xi_{d+K+1} := \tau_K)$$

$$(\xi_{d+1} := a, \xi_{d+K+2} := b)$$

$$(\xi_1, \dots, \xi_d \text{ and } \xi_{d+K+3}, \dots, \xi_{2d+K+2})$$

ولأي كثيرة حدود  $(d > 0)$ ، يتم تحديد دوال شرائح الأساس من الدرجة  $d$

بواسطة الصيغة المتكررة:  $(B_k^d(x))$

$$B_k^d(x) = \frac{x - \xi_k}{\xi_{k+d} - \xi_k} B_k^{d-1}(x) - \frac{\xi_{k+d+1} - x}{\xi_{k+d+1} - \xi_{k+1}} B_{k+1}^{d-1}(x), \quad (4)$$

$$k = 1, \dots, K + d + 1$$

حيث:

$$B_k^0(x) = \begin{cases} 1, & \xi_k \leq x \leq \xi_{k+1} \\ 0, & \text{else} \end{cases} \quad (5)$$

$$. B_k^0(x) \equiv 0 \text{ if } \xi_k = \xi_{k+1} \text{ و}$$

وتتميز شرائح الأساس بخاصية تحقق فعالية واستقرارا عدديا عند تكوين

دوال الأساس، وهي أن هذه الدوال يكون لها دعم محلي، حيث تكون قيمتها أكبر

من الصفر عند العقد في حدود  $(d + 2)$  وصفر فيما عدا ذلك (Boor, 2001).

### (د) الشرائح الرئيسية Cardinal splines

تعتبر الشرائح الرئيسية حالة خاصة من الشرائح التكميلية الطبيعية، وفيها

يتم تحديد قيم دوال الأساس من الدرجة  $(d = 3)$  عند العقد  $(\tau_1, \dots, \tau_K)$  كالتالي:

$$B_k(\tau_k) = 1,$$

$$B_k(\tau_j) = 0 \quad \forall \tau_j \neq \tau_k$$

(6)

وبالتالي فإن المعاملات  $\beta_k$  في الصيغة (3) لها تفسير واضح، فكل معامل يساوي قيمة دالة الشريحة  $f$  عند العقدة  $\tau_k$  (Wood, 2017).

### (هـ) الشرائح الجزائية Penalized splines (P-splines)

يعتبر اختيار كل من عدد ومواقع العقد من العوامل المؤثرة في نتائج تقدير أو توفيق جميع نماذج الشرائح التي تم استعراضها. وعلى الرغم من أن العدد الكبير من العقد يوفر مرونة عالية عند تقدير نموذج الشرائح، ولكن قد يؤدي أيضاً إلى زيادة توفيق البيانات، وعلى العكس، قد يؤدي العدد الصغير من العقد إلى تقديرات شديدة النعومة أو التمهيد قد يشوبها تحيز غير مناسب (Friedman, Hastie, & Tibshirani, 2001; Wood, 2017). ومن الأساليب الشائعة لتسهيل اختيار مواقع العقد عند نمذجة الشرائح ما يسمى "الشرائح الجزائية".

إذا كان لدينا عينة i.i.d من البيانات  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ ، يتم تقدير الشريحة الجزائية عن طريق حل المشكلة:

$$\hat{\beta} = \operatorname{argmax}_{\beta} [l_{\beta}(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) - \lambda \cdot J_{\beta}], \quad (7)$$

حيث:  $l_{\beta}$  تشير إلى لوغار يتم الإمكان log-likelihood و  $J_{\beta}$  هو حد الخشونة والذي يتناسب عكسياً مع نعومة دالة الشريحة.

وبشكل عام، تستند الشرائح الجزائية على فكرة أن الدالة غير المعروفة  $f$  يتم نمذجتها من خلال شريحة بها عدد كبير من العقد، مما يسمح بدرجة عالية من المرونة، ولكن من ناحية أخرى، ينتج عن ذلك قيمة كبيرة للمقدار  $l_{\beta}$  نظراً لقرب التقديرات من نقاط البيانات الفعلية، وعليه تكون قيمة  $J_{\beta}$  كبيرة أيضاً. وبالتالي، فإن تعظيم الدالة  $f$  يتطلب إجراء مفاضلة بين النعومة وملاءمة النموذج التي يتم التحكم فيها بواسطة معلمة الضبط  $\lambda \geq 0$ .

ومن الحالات الخاصة الشائعة في التطبيق العملي، حالة المربعات الصغرى الجزائية:

$$\hat{\beta} = \operatorname{argmax}_{\beta} \left[ \sum_{i=1}^n (f_{\beta}(x_i) - y_i)^2 + \lambda \int_a^b (\partial^2 f / \partial x^2)^2 dx \right], \quad (8)$$

حيث يعبر المقدار  $(J_{\beta} = \int_a^b (\partial^2 f / \partial x^2)^2 dx)$  عن "نعومة" دالة الشريحة بدلالة المشتقة الثانية لـ  $f$ .

وبمعلومية قيمة  $\lambda$ ، يمكن إثبات أن الحل عبارة عن الشريحة التكميلية الطبيعية مع تسلسل العقد  $(x_{(1)} < \dots < x_{(n)})$ ، أي أنه لا يلزم اختيار مواقع العقد، ولكنها تُعطى بشكل تلقائي من خلال قيم البيانات المرتبة للمتغير  $X$ . ومن الجدير بالذكر أنه إذا كانت  $(\lambda = 0)$ ، فإن شريحة التمهيد تستكمل البيانات، بينما ينتج عن وضع  $(\lambda = \infty)$  دالة خطية.

ومن خصائص شرائح التمهيد أنه يمكن التعبير عن حد الجزاء  $J_{\beta}$  بالمقدار  $(\beta^T \Omega \beta)$  (حيث  $\Omega$  هي مصفوفة جزاء). وفي هذه الحالة يتم اشتقاق الحل لـ (8) من خلال تقدير المربعات الصغرى الجزائية:

$$\hat{\beta} = (B^T B + \lambda \Omega)^{-1} B^T y, \quad (9)$$

حيث  $B$  عبارة عن مصفوفة  $(n \times n)$  تحتوي على قيم دوال الأساس للشرائح الطبيعية عند نقاط البيانات، ويمثل  $y$  متجه الاستجابات  $(y_1, \dots, y_n)$ .  
وفضلاً عن استخدام دوال أساس الشريحة الطبيعية لـ  $f$ ، يمكن أيضاً استخدام دوال أساس B-spline غير مقيدة، وفي هذه الحالة لن تتأثر نتائج التقدير باختيار العقد الحدودية ويمكن استخدام كل من  $(x_{(n)}, x_{(1)})$  كعقد حدودية أو عقد داخلية.

(Hastie & Tibshirani, 1990; Friedman et al., 2001)

وإذا كان عدد البيانات ( $n$ ) كبيراً وشاملاً داخل الفترة  $[a, b]$ ، قد لا يكون من الضروري وضع عقدة عند كل  $(x_i, i = 1, \dots, n)$ ، وبدلاً من ذلك، قد يتم تقريب شريحة التمهيد من خلال شريحة انحدار جزائية تستخدم عدداً أقل من العقد. ومن أنواع شرائح التمهيد الجزائية الشائعة تلك التي تستخدم فيها شرائح أساس تكعيبية ومجموعة محددة من العقد متساوية الأبعاد يتراوح عددها عادة بين ١٠ و ٤٠ (Eilers & Marx, 1996). وبالتالي، بدلاً من حساب التكامل في (8)، تستند الشرائح الجزائية على حد جزاء يمثل الفروق من الدرجة الثانية المحددة بواسطة العلاقة التالية والتي تعطي قيمة تقريبية للمقدار  $J_\beta$ :

$$J_\beta^* = \sum_{k=3}^{K+4} (\Delta^2 \beta_k)^2, \quad (10)$$

حيث:  $\Delta^2$  هو عامل الفرق من الدرجة الثانية

$$[\Delta^2 \beta_k := (\beta_k - \beta_{k-1}) - (\beta_{k-1} - \beta_{k-2})]$$

وبالتالي يمكن التعبير عن حد الجزاء بالمقدار  $\beta^T P \beta$  (حيث  $P = D^T D$  و  $D$  تمثل مصفوفة الفروق). ويكون لمقدر  $\beta$  في هذه الحالة نفس تركيب المعادلة رقم (7).

ومن الخصائص الملائمة للشرائح الجزائية أنها مستقرة عددياً وسهلة التطبيق، كما يمكن استخدام فروق من رتب أعلى  $\Delta^q$  مع  $(q > 2)$ ، وأيضاً استخدام تسلسل عقد غير متباعد بشكل متساوٍ (Eilers & Marx, 1996) وأخيراً، تجدر الإشارة إلى أنه لا يوجد اتفاق عام حول كيفية اختيار قيمة المعلمة  $\lambda$ ، ومن الطرق الشائعة لتحديد القيمة "المثلى" لها استخدام التحقق المشترك المعمم (GCV) أو معيار المعلومات AIC (Ruppert, Wand, & Carroll, 2003).



## 6. التحليل والنتائج:

تم تطبيق طرق الشرائح التالية لتمهيد معدلات الوفاة الخام للمؤمن عليهم بشركات التأمين المصرية خلال الفترة من ٢٠٠٧-٢٠١٠:

(أ) الشرائح التكعيبية Cubic splines

(ب) الشرائح التكعيبية الطبيعية Natural cubic splines

(ج) شرائح الأساس Base splines (B-Splines)

(د) الشرائح الجزائية Penalized splines (P-splines)

كما تم إجراء اختبار Chi-square ( $\chi^2$ ) للحكم على التسوية، وأيضاً تم حساب درجةنعومة للمفاضلة بين طرق التسوية (زايد والأشقر، ٢٠٢٠).

وقد تم حساب القيم الممهدة، وتقدير معاملات النماذج الإحصائية، وإجراء اختبارات التسوية باستخدام البرامج الإحصائية Excel, R. ونستعرض فيما يلي ملخص خطوات ونتائج التحليل.

### (أ) الشرائح التكعيبية Cubic splines

تم تطبيق هذا الطريقة باستخدام عدة قيم لمعلمة التمهيد  $\lambda$  (0.15, 0.10, 0.05)، ومن الخصائص الرياضية لها أن درجة سلاسة أو نعومة القيم الممهدة تزيد مع زيادة قيمة المعلمة، وبالضرورة، تزيد أيضاً انحرافات القيم الممهدة عن القيم الأصلية. ويعرض الجدول رقم (1) قيم معدلات الوفاة الممهدة للمؤمن عليهم بشركات التأمين المصرية خلال الفترة من ٢٠٠٧-٢٠١٠ وفقاً للشرائح التكعيبية باستخدام ثلاث قيم مختلفة لمعلمة التمهيد. وتُظهر نتائج اختبارات التسوية المعروضة في الجدول رقم (٥) أن التسوية كانت مقبولة في جميع الحالات، حيث كانت قيم  $\chi^2$  المحسوبة صغيرة وتقل عن نظيرتها الجدولية.

جدول رقم (1): معدلات الوفاة المسواة باستخدام طريقة الشرائح التكعيبية

Cubic splines			
Age	$\lambda = 0.05$	$\lambda = 0.10$	$\lambda = 0.15$
20-	٧٥,٠٢٠٣٦	٧٤,٩٢١٥٦	٧٤,٧١٠٧٦
25-	٤٧,١٦٤٢٧	٤٧,٣٦٣٢٨	٤٧,٧٧١٠٠
30-	٥٥,٤٦٢٢٣	٥٥,٣٠٢٥٦	٥٥,٠٠١١٣
35-	٧٦,١٥١١٨	٧٦,٢٠٠١٢	٧٦,٢٥١٤٨
40-	١٢٤,٢٣٦٨٩	١٢٤,٠٣٤٤٨	١٢٣,٦٠٦٣٧
45-	٢٢٥,٧٠٥٤٣	٢٢٥,٨٥٤٩٩	٢٢٦,٢٣٨٩٤
50-	٤٦٣,٧٥٧١٥	٤٦٤,٣١١٧٧	٤٦٥,٤٤٨١٢
55-	٨٣٩,١٧٩٨٢	٨٣٨,٥٤٢١٧	٨٣٧,٢١٤٢١
60-65	١١٨٩,٦٢٢٦٧	١١٨٩,٧٦٩٠٦	١١٩٠,٠٥٨٠٠

### (ب) الشرائح التكعيبية الطبيعية Natural cubic splines

تم تطبيق هذا الأسلوب باستخدام عدد ٣ عقد في حالتين عند الفئات العمرية الأولى (٢٤-٢٠) والخامسة (٤٤-٤٠) والأخيرة (٦٥-٦٠)، والأخرى عند الأعمار (٣٠, ٤٢, ٥٥, ٥٥) وكذلك بعدد ٤ عقد أيضاً في حالتين عند الأعمار (٢٢, ٥), (٣٥, ٥٠, ٦٢, ٥)، والأخرى عند الأعمار (٢٧, ٥, ٣٧, ٥, ٤٧, ٥, ٥٧, ٥)، ويعرض الجدول رقم (٢) قيم معدلات الوفاة الممهدة وفقاً لهذه الطريقة. وتُظهر نتائج اختبارات التسوية المعروضة في الجدول رقم (٥) أن التسوية كانت غير مقبولة عند استخدام ٣ عقد (الحالتين الأولى والثانية)، حيث كانت قيم  $\chi^2$  المحسوبة كبيرة وتزيد عن نظيرتها الجدولية، بينما في الحالتين الثالثة والرابعة باستخدام عدد ٤ عقد كانت التسوية مقبولة، حيث كانت قيم  $\chi^2$  المحسوبة صغيرة وتقل عن نظيرتها الجدولية.

المجلة العلمية للدراسات والبحوث المالية والتجارية (م ٤، ع ١٤، ج ٤، يناير ٢٠٢٣)  
د. السيد الشربيني الأشقر

جدول رقم (٢): معدلات الوفاة المسواة باستخدام طريقة الشرائح التكميبيية الطبيعية

Natural cubic splines				
Age	٣ عقد الحالة الأولى	٣ عقد الحالة الثانية	٤ عقد الحالة الأولى	٤ عقد الحالة الثانية
20-	66.68905	67.53599	75.89794	75.82602
25-	68.51597	63.15804	43.15720	44.83619
30-	52.80931	55.62351	59.77245	55.48598
35-	55.45860	61.05150	80.66150	84.16513
40-	112.44273	114.83682	114.73033	114.31893
45-	253.49013	248.69973	225.03497	222.86473
50-	483.32741	476.30993	473.17140	478.89564
55-	800.43077	805.14091	833.00482	826.73580
60-65	1203.13602	1203.94358	1190.86938	1193.17158

(ج) شرائح الأساس (B-Splines) تم تطبيق هذا الأسلوب أيضاً بنفس حالات طريقة الشرائح التكميبيية الطبيعية، ويعرض الجدول رقم (٣) قيم معدلات الوفاة الممهدة وفقاً لهذه الطريقة. وتُظهر نتائج اختبارات التسوية المعروضة في الجدول رقم (٥) أن التسوية كانت مقبولة في جميع الحالات، حيث كانت قيم  $\chi^2$  المحسوبة صغيرة وتقل عن نظيرتها الجدولية.

جدول رقم (٣): معدلات الوفاة المسواة باستخدام طريقتي شرائح الأساس

B-Splines				
Age	٣ عقد الحالة الأولى	٣ عقد الحالة الثانية	٤ عقد الحالة الأولى	٤ عقد الحالة الثانية
20-	75.10000	75.12599	75.10000	75.10000
25-	46.23310	46.29819	47.03345	47.13843
30-	58.51175	58.00596	54.69675	54.49259
35-	73.51221	74.13771	79.41191	79.28382
40-	120.97158	121.26548	119.51576	119.97034
45-	233.79793	232.74962	228.91191	228.78382
50-	457.58318	458.20203	462.39675	462.19259
55-	841.09025	841.06560	839.73345	839.83843
60-65	1189.50000	1189.44942	1189.50000	1189.50000

### (د) الشرائح الجزائية (P-splines) Penalized splines

تم تطبيق هذا الطريقة باستخدام عدة قيم لمعلمة التمهيد  $\lambda(1,0.5,0)$ ، ولأغراض المقارنة، تم اختيار إحدى هذه القيم على أساس معيار التحقق المتقاطع المعمم (GCV) generalized cross-validation criterion، والتي أعطت نفس النتائج عند  $\lambda = 0$  وقيمة أخرى على أساس معيار التحقق المعمم العادي (OCV) ordinary cross-validation criterion (Kent, & Mohammadzadeh, 2000) ويعرض الجدول رقم (٣) قيم معدلات الوفاة الممهدة وفقا لهذه الطريقة. وتُظهر نتائج اختبارات التسوية المعروضة في الجدول رقم (٥) أن التسوية مقبولة في شكل عام وفي جميع الحالات، حيث كانت قيم  $\chi^2$  المحسوبة صغيرة وتقل عن نظيرتها الجدولية.

جدول رقم (٤): معدلات الوفاة المسواة باستخدام طريقة الشرائح الجزائية

P-Splines				
Age	$\lambda_{GCV}$	$\lambda = 0.5$	$\lambda = 1$	$\lambda_{OCV}$
20-	75.07550	74.88689	74.69352	72.49643
25-	47.05093	47.43215	47.80386	51.11057
30-	55.55668	55.24885	54.97776	53.45021
35-	76.11695	76.21425	76.25389	73.78193
40-	124.34986	123.96341	123.57130	120.40177
45-	225.63084	225.91137	226.27261	233.38928
50-	463.44165	464.50390	465.53978	474.51079
55-	839.53938	838.31989	837.10626	826.44709
60-65	1189.53821	1189.81929	1190.08102	1190.71192

جدول رقم (٥): نتائج اختبارات جودة التسوية لمعدلات الوفاة

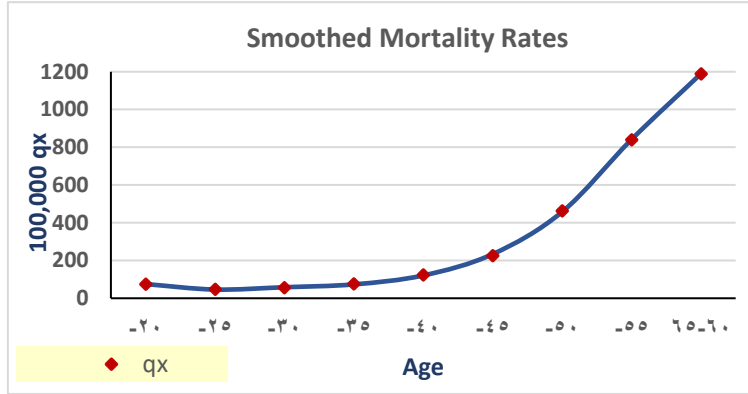
Method		Chi-sq.	Smoothness
Cubic splines	$\lambda=0.05$	0.0020824	311.094
	$\lambda=0.10$	0.010172	305.857
	$\lambda=0.15$	0.0457494	298.205
Natural cubic splines	3 عقد الحالة الأولى	22.89864	109.511
	٣ عقد الحالة الثانية	13.644201	135.626
	٤ عقد الحالة الأولى	1.9774983	318.441
	٤ عقد الحالة الثانية	2.529488	315.065
B-Splines	3 عقد الحالة الأولى	0.7070544	390.243
	٣ عقد الحالة الثانية	0.521964	380.99
	٤ عقد الحالة الأولى	0.402351	320.226
	٤ عقد الحالة الثانية	0.3613042	319.984
P-Splines	$\lambda_{GCV}$	0.0002004	315.094
	$\lambda = 0.5$	0.0143916	304.58
	$\lambda = 1$	0.0497357	297.583
	$\lambda_{OCV}$	1.4547477	231.681

يتضح مما سبق أن جميع الطرق التي تم استخدامها في هذه الدراسة، لتمهيد معدلات الوفاة الخام للمؤمن عليهم بشركات التأمين المصرية خلال الفترة من ٢٠٠٧-٢٠١٠، قد أعطت نتائج مقبولة. وبشكل عام يمكن ملاحظة الآتي:

1. في طريقة الشرائح التكميلية الطبيعية عند استخدام عدد ٣ عقد في الحالتين الأولى والثانية كانت التسوية غير مقبولة، وهو ما يتضح من جدول رقم (٥).

٢. أن طريقة شرائح الأساس (B-Splines) عند استخدام عدد ٣ عقد في الحالة الأولى كانت الأفضل - مقارنة بباقي الطرق - في تسوية وتمهيد معدلات الوفاة الخام للمؤمن عليهم بشركات التأمين المصرية، كما هو واضح من الجدول رقم (٥).

وطالما أن نتائج التمهيد كانت مقبولة لجميع الطرق، لذا يمكن الاكتفاء في كل طريقة بالحالة التي يتحقق معها درجة أكبر من التسوية أو النعومة في القيم المقدره. ويوضح الشكل رقم (١) قيم احتمالات الوفاة الممهدة باستخدام طريقة شرائح الأساس (B-Splines) في حالة استخدام عدد ٣ عقد في الحالة الأولى عند الأعمار (٢٢,٥, ٤٢,٥, ٦٢,٥):



شكل رقم (١): احتمالات الوفاة الممهدة للمؤمن عليهم بشركات التأمين المصرية باستخدام

طريقة (B-Splines) (عدد ٣ عقد، الحالة الأولى)

ويتضح من الشكل السابق، أن طريقة التسوية المستخدمة تعطي نتائج مقبولة من حيث كل من الدقة والسلاسة في المعدلات الممهدة.

## ٧. التوصيات:

١. التحقق من مدى ملاءمة تطبيق الطرق والأساليب المقترحة في هذه الدراسة في حالة مجتمعات أخرى، وفي حالة عينات كبيرة، وكذلك التوسع في دراسة خصائص تلك الطرق.

٢. دراسة المزيد من طرق الشرائح المختلفة والمتعددة التي لم يستطع الباحث دراستها، والاستمرار في استكشاف ومواكبة الأساليب والطرق الحديثة للتمهيد أو التسوية وتطبيقها.

٣. التنسيق بين الجهات المختلفة ذات العلاقة بالبيانات السكانية والديموغرافية في مصر بشكل عام وبيانات وإحصاءات شركات التأمين المصرية بشكل خاص، في مجال جمع وتنظيم هذه البيانات وإتاحتها بشكل مفيد لمجتمع الباحثين ولأغراض التطوير والبحث العلمي.

---

---

المراجع:

- Abraham, A., Steinberg, D., & Philip, N. S. (2001). Rainfall forecasting using soft computing models and multivariate adaptive regression splines. *IEEE SMC Transactions, Special Issue on Fusion of Soft Computing Hard Computing in Industrial Applications*, 1(xx), 1-6.
- Andersen, M. S., & Chen, T. (2020). Smoothing Splines and Rank Structured Matrices: Revisiting the Spline Kernel. *SIAM Journal on Matrix Analysis Applications*, 41(2), 389-412.
- Aydin, D. (2007). A comparison of the nonparametric regression models using smoothing spline and kernel regression. *World Academy of Science, Engineering Technology*, 36, 253-257.
- Boor, d. (2001). *A practical guide to splines*.(rev. ed.) Springer-Verlag. New York.
- Currie, I. D., & Durban, M. (2002). Flexible smoothing with P-splines: a unified approach. *Statistical modelling*, 2(4), 333-349.
- Currie, I. D., Durban, M., & Eilers, P. H. (2004). Smoothing and forecasting mortality rates. *Statistical modelling*, 4(4), 279-298.
- Debón, A., Montes, F., & Sala, R. (2006). A comparison of nonparametric methods in the graduation of mortality: Application to data from the Valencia region (Spain). *International Statistical Review*, 74(2), 215-233.
- DIERCKX, P. (1993). *Curve and Surface Fitting with Splines*, chapter Univariate Splines. In: Oxford
- Eilers, P. H., & Marx, B. D. (1996). Flexible smoothing with B-splines and penalties. *Statistical science*, 89-102.

- 
- 
- Friedman, J., Hastie, T., & Tibshirani, R. (2001). The elements of statistical learning (Vol. 1): Springer series in statistics New York.
- Goicoa, T., Adin, A., Etxeberria, J., Militino, A., & Ugarte, M. (2019). Flexible Bayesian P-splines for smoothing age-specific spatio-temporal mortality patterns. *Statistical methods in medical research*, 28(2), 384-403.
- Green, P. J., & Silverman, B. W. (1993). *Nonparametric regression and generalized linear models: a roughness penalty approach*: Crc Press.
- Harrell Jr, F. E. (2015). *Regression modeling strategies: with applications to linear models, logistic and ordinal regression, and survival analysis*: Springer.
- Harvey, A., & Koopman, S. J. (1993). Forecasting hourly electricity demand using time-varying splines. *Journal of the American Statistical Association*, 88(424), 1228-1236
- Hastie, T., & Tibshirani, R. (1987). Generalized additive models: some applications. *Journal of the American Statistical Association*, 82(398), 371-386.
- Hastie, T., & Tibshirani, R. (1990). *Generalized additive models (Vol. 43)*: CRC press.
- Kent, J. T., & Mohammadzadeh, M. (2000). Global optimization of the generalized cross-validation criterion. *Statistics and Computing*, 10(3), 231-236.
- Hyndman, R. J., King, M. L., Pitrun, I., & Billah, B. (2005). Local linear forecasts using cubic smoothing splines. *Australian New Zealand Journal of Statistics*, 47(1), 87-99 .



- 
- 
- Kuchibhotla, A. K., & Patra, R. K. (2020). Efficient estimation in single index models through smoothing splines. *Bernoulli*, 26(2), 1587-1618.
- Luoma, A., Puustelli, A., & Koskinen, L. (2012). A Bayesian smoothing spline method for mortality modelling. *Annals of Actuarial Science*, 6(2), 284.
- McCormack, K. (2017). Methodological Note Producing the Irish Life Table, No. 16 2010-12. Central Statistics Office Ireland, V13, 1-37. doi:https://www.cso.ie/en/media/csoie/methods/irishlifetablesno16/Methodological\_Note\_Life\_Table\_No.\_16\_V13.pdf
- Mohamed, A., (2010). Standard Life Table Mortality 2009 Egyptian Life Insurance Companies 2003 to 2006, Experience Studies & Data, Mortality; Life Insurance, International News, Issue No.50, 24-26.
- Nizamitdinov, A., Memmedli, M., & Ozdemir, O. (2010). Comparison study of P-spline and univariate additive model (CUBIC smoothing spline) in time-series prediction. Paper presented at the 24th. Mini EURO Conference on Continuous Optimization and Information-Based Technologies in the Financial Sector (MEC EurOPT 2010), İzmir, TURKEY.
- Purnama, D. I. (2020). A Comparison between Nonparametric Approach: Smoothing Spline and B-Spline to Analyze The Total of Train Passengers in Sumatra Island. *EKSAKTA: Journal of Sciences Data Analysis*, 20(1), 73-80.
- Ruppert, D., Wand, M. P., & Carroll, R. J. (2003). *Semiparametric regression*: Cambridge university press.

---

---

Wood, S. N. (2017). Generalized additive models: an introduction with R: CRC press.

Yang, C.-C., Prasher, S., Lacroix, R., & Kim, S. (2004). Application of multivariate adaptive regression splines (MARS) to simulate soil temperature. Transactions of the ASAE, 47(3), 881 .

البلقيني، م. ت.، طاقية، ا. ع.، ودرغام، م. س. (2013). استخدام الطرق اللامعلمية لتسوية معدلات الوفاة الخام: دراسة مقارنة. المجلة المصرية للدراسات التجارية، جامعة المنصورة - كلية التجارة، 37(3)، 599 – 621.

حسن، ف. ط.، ومجيد، غ. ح. (2016). تحديد أفضل أسلوب تمهيدي لتقدير إنموذج انحدار لا معلمي مع تطبيق عملي. مجلة كلية التربية الأساسية، 22(93/علمي)، 1-22.

رشيد، ظ. ح.، وخمو، خ. ي. (2005). مقارنة الطرائق الشرائحية لتقدير منحى الانحدار اللامعلمي. المجلة العراقية للعلوم الإحصائية، 5(8)، 40-62.

زايد، م. ع.، والأشقر، ا. ا. (2020). المدخل التبايني في التحليل الرياضي كطريقة حديثة لتسوية معدلات الوفاة. المجلة العلمية للدراسات والبحوث المالية والتجارية، 1(العدد الثاني - الجزء الثاني)، 549-572.

الصفراوي، ص. ي.، ومتي، ن. ص. (2011). تقدير دوال الانحدار اللامعلمي باستخدام بعض أساليب التمهيد. المجلة العراقية للعلوم الإحصائية، 11(20)، 373-392.

محمد حبيب، ا.، وحافظ محمد، م. (2011). مقارنة بعض طرائق تمهيد الانحدار اللامعلمي باستخدام المحاكاة. مجلة القادسية لعلوم الحاسوب والرياضيات، 3(2)، 1-19.

---

---

## Using Some Spline methods for smoothing the crude Mortality rates in the Egyptian actuarial table

*Elsayed Elashkar*

Assistant Professor, Administrative Sciences Department  
Community College, King Saud University  
Lecturer, Applied Statistics, and Insurance Department  
Faculty of Commerce, Mansoura University  
[sayed\\_ashkar@mans.edu.eg](mailto:sayed_ashkar@mans.edu.eg)

### **Abstract:**

The process of smoothing mortality rates is considered a fundamental step when constructing actuarial tables. This study aims to present and compare some common spline and base functions methods - such as: cubic splines, base splines (B-splines), natural cubic splines, and P-splines, to smooth mortality rates for insureds in the Egyptian insurance companies during the period 2007-2010. The results indicated that all the methods used provided acceptable results in terms of accuracy and smoothness - except natural cubic splines using 3 knots, and that the B-Splines method using 3 knots in the first case was the best, compared to other used methods. It was recommended to study the appropriateness of applying the smoothing methods presented in this research in case of other populations, and for large samples, and to explore and keep pace with modern smoothing methods and their applications. As well as making available insureds' mortality data of the Egyptian insurance companies.

**Keywords:** Smoothing - smoothing splines - Cubic splines - Base splines  
- Natural cubic splines - Penalized splines