استخدام بعض التوزيعات الاحتمالية المتضخمة الأصفار في حساب السعر الصافي لتأمين السيارات التكميلي

د. أمانى محمد عجوة

مدرس التأمين بالجامعة العمالية، فرع القاهرة

amanyagwa@gmail.com

المجلة العلمية للدراسات والبحوث المالية والتجارية

كلية التجارة – جامعة دمياط

المجلد الرابع - العدد الأول – الجزء الرابع - يناير ٢٠٢٣

التوثيق المقترح وفقاً لنظام APA:

عجوة، أماني محمد (٢٠٢٣). استخدام بعض التوزيعات الاحتمالية المتضخمة الأصفار في حساب السعر الصافي لتأمين السيارات التكميلي. **المجلة العلمية للدراسات والبحوث المالية والتجارية**، كلية التجارة، جامعة دمياط، ٤(١)٤، ٤٩٧-٥٢٠.

رابط المجلة: https://cfdj.journals.ekb.eg/

استخدام بعض التوزيعات الاحتمالية المتضخمة الأصفار في حساب السعر الصافي لتأمين السيارات التكميلي

د. أماني محمد عجوة

ملخص البحث

يعد اختيار التوزيع الاحتمالي الذي يتوافق مع بيانات المطالبات الاجمالية من الأمور الهامة في التأمينات العامة ولاسيما في تأمين السيارات التكميلي لتحديد السعر الصافي وحساب المخصصات وتحديد اتفاقيات إعادة التأمين. ويهدف هذا البحث إلى تقديم منهجية لحساب السعر الصافي في تأمين السيارات التكميلي باستخدام بعض التوزيعات الاحتمالية المتضخمة الأصفار وذلك لحل مشكلة عدم توافر بيانات عن عدد المطالبات في العام الذي يخص الوثائق المختلفة في محفظة التأمين التكميلي للسيارات خاصة عندما تكون نسبة المطالبات الصفرية كبيرة. وقد تم استخدام ثلاثة توزيعات متضخمة الأصفار هى التوزيع الأسى المتضخم الأصفار، وتوزيع ويبل المتضخم الأصفار، وتوزيع باريتو المتضخم الأصفار. وتم اشتقاق صيغ المتوسط والتباين للتوزيعات محل الدراسة، وتم تقدير المعلمات المجهولة باستخدام طريقة المئويات، وقد كان تقدير نسبة المطالبات الصفرية في الثلاثة توزيعات متساوي، وقد أقرت نتائج اختبار كولومجروف سمرنوف بصلاحية الثلاث توزيعات لتمثيل بيانات المطالبات محل الدراسة، ووفقا لمعيارى AIC ، BIC فإن توزيع باريتو المتضخم الأصفار هو الأفضل في تمثيل بيانات المطالبات محل الدراسة، وتم حساب السعر الصافي باستخدام متوسط وتباين توزيع باريتو المتضخم الأصفار، وإجمالي مبالغ التأمين في محفظة تأمين السيارات التكميلي، مع الأخذ في الاعتبار معدل التضخم ومعدل الفائدة، وقد توصلت الدراسة إلى أن توزيع ويبل المتضخم الأصفار أفضل من التوزيع الأسى المتضخم الأصفار، وتوزيع باريتو المتضخم الأصفار أفضل من التوزيع الأسى المتضخم الأصفار، وتوزيع ويبل المتضخم الأصفار.

الكلمات المفتاحية: التوزيعات المتضخمة الأصفار، السعر الصافي، طريقة المئويات، تأمين السيارات

١. مقدمة

يعد قطاع التأمين من أهم القطاعات المالية والتجارية التي تؤثر في اقتصاديات الدول المختلفة، خاصة في مجال التأمينات العامة، ويرجع ذلك إلى قدرة التأمين على مواجهة الأخطار وتحمل عبء الخسائر المالية، وذلك عن طريق نقل عبء الخطر من على كاهل الشخص المعرض له إلى شركة التأمين التي تقوم بتحمل الخسائر المالية الناجمة عن تحقق الخطر محل التأمين. وحتى يمكن لشركة التأمين الاستمرار في مواصلة عملها والتعويض عن الخسائر يجب أن تكون قادرة على حساب أسعار التأمين بشكل كافي لمواجهة الخسائر والمصروفات الأخرى، وعادل لكى يتحمل كل مؤمن له القسط الذي يمثل درجة الخطورة التي يمثلها.

إن أحد التحديات التي تواجه التأمينات العامة ولا سيما تأمين السيارات هو الوصول لتقدير كافي وعادل لتكلفة المطالبات حتى يمكن حساب الأقساط والمخصصات. في بعض الأحيان لا يتوافر بيانات عن تكرار الحوادث ويكون المسجل لدى الشركة قيم المطالبات الاجمالية لكل وثيقة. لذلك يجب البحث عن أسلوب احصائى لنمذجة هذه المطالبات واستخدامها في التسعير بدون الحاجة لمعرفة توزيع عدد الحوادث.

(١- ١) مشكلة البحث

يتطلب حساب سعر التأمين في تأمين السيارات استخدام توزيع منفصل ليمثل عدد مرات حدوث الحادث وتوزيع متصل ليمثل حجم المطالبة، ففي بعض الأحيان لا يتوافر أى بيانات عن عدد الحوادث ويكون مسجل فقط القيم الاجمالية للمطالبات المدفوعة للوثائق التي تقدمت بمطالبات وهذه القيمة تساوى الصفر في حالة عدم التقدم بأية مطالبات، لذلك يكون من الصعب إيجاد توزيع منفصل بسبب عدم وجود بيانات عن عدد المطالبات. ومن الممكن حل هذه المشكلة عن طريق استخدام توزيع متصل يسمح بوجود الصفر (توزيع شبه متصل) ومن أهم التوزيعات المستخدمة في مجال توفيق مطالبات التأمينات العامة التوزيعات الملتوية ناحية اليمين هى التوزيع الأسى، وتوزيع باريتو، وتوزيع ويبل. لذلك يتم استخدام هذه التوزيعات بعد السماح بوجود قيم الصفر ضمن المدى الخاص به ليمثل حالة عدم وجود مطالبات لتصبح توزيعات متضخمة الأصفار Zero-inflated distributions

(١- ٢) أهمية البحث

ترجع أهمية هذا البحث إلى الزيادة المستمرة في عمليات التأمين التكميلي للسيارات والتي ظهرت عند دراسة صافي الأقساط عن الفترة من (٢٠٠٩ إلى ٢٠٢٠) ، هذا بالاضافة إلى أن تحديد السعر الصافي أمر هام للغاية حيث يترتب عليه قرارات أخرى مثل الاحتياطيات والمخصصات الفنية، وقرارات إعادة التأمين وتحديد حد الاحتفاظ. فعندما يتم تحديد السعر أقل من اللازم فإن هذا يؤثر على مقدرة شركة التأمين على الوفاء بالتزاماتها في المستقبل، وإذا كان السعر أكبر من اللازم فإن هذا يؤدى إلى انسحاب المؤمن لهم ذوي الأخطار الجيدة.

جدول (١-١) معدلات نمو أقساط التأمين التكميلي

السنة	صافي الأقساط (المبالغ بالمليون جنيه)	معدل نمو صافي الأقساط %
2009/8	1002	-
2010/9	1276	27
2011/10	1417	41
2012/11	1298	30
2013/12	1347	34
2014/13	1490	49
2015/14	1662	66
2016/15	1863	86
2017/16	2535	153
2018/17	2987	198
2019/18	3406	240
2020/19	3735	273

(المصدر: الهيئة العامة للرقابة المالية، الكتاب الاحصائى السنوى لسوق التأمين المصرى (٢٠٠٩ – ٢٠٢٠م)

تم حساب معدلات النمو باتخاذ سنة ٢٠٠٩ سنة أساس، حيث تم طرح صافي الأقساط لسنة ٢٠٠٩ من صافي الأقساط الخاص بكل سنة وقسمة الفرق على صافي أقساط ٢٠٠٩. وكما نلاحظ من جدول (١-١) أن معدلات النمو لصافي الأقساط في تزايد مستمر، فيما عدا سنة ٢٠١٢ حيث كان النمو بمعدل متناقص وهذا يرجع إلى ثورة ٢٥ يناير وأثرها على النشاط الاقتصادي في مصر. ويعود النمو في صافي الأقساط إلى معدلاته المتزايدة إلى أن يصل إلى أكثر من ضعف صافي الأقساط في عامي ٢٠١٩، ٢٠٢٠.

(١- ٣) هدف البحث

يهدف هذا البحث إلى تقديم منهجية لحساب السعر الصافي في تأمين السيارات التكميلي باستخدام بعض التوزيعات المتضخمة الأصفار. ويتحقق هذا الهدف من خلال القيام بالخطوات التالية:

١. اختيار التوزيع الاحتمالي المتضخم الأصفار الذي يمثل بيانات المطالبات الاجمالية في العام للوثيقة.
٢. تقدير معلمات هذا التوزيع باستخدام طريقة المئويات Percentile method
٣. اختبار جودة التوفيق باستخدام اختبار كولومجروف سمرنوف.
٤. الاختيار بين التوزيعات المختلفة التي أثبتت اختبارات جودة التوفيق صلاحيتها لتمثل البيانات محل الدراسة باستخدام معيارى AIC ، BIC.
٥. حساب السعر الصافي باستخدام التوزيع الاحتمالي المتضخم الأصفار الذي تم اختياره.

(١- ٤) الدراسات السابقة

وفي مجال تسعير التأمينات العامة يوجد العديد من الدراسات التي اهتمت بنمذجة تكرار المطالبات وحجم المطالبة، حيث قدم (Symth et al.,2002) نمذجة لحجم المطالبات عندما يكون عدد المطالبات غير متاح، حيث يتم نمذجة التكلفة الكلية للمطالبات لكل وثيقة، ويتم نمذجة كلا من المتوسط والتشتت من خلال النماذج الخطية المعممة باستخدام نموذج بواسون جاما- المركب، كذلك قدم (Zuanetti, 2006) دراسة عن مدى ملائمة التوزيع اللوغاريتمي الطبيعي لطبيعة بيانات المطالبات. واهتمت دراسة (Eling, 2012) بتحليل ودراسة مدى ملائمة التوزيع الطبيعي الملتوى وتوزيع ستيودنت لطبيعة البيانات في التأمينات العامة. واستخدمت دراسة (Mazviona, 2013) بعض التوزيعات الاحتمالية مثل توزيع باريتو، وتوزيع جاما، والتوزيع الأسى، والتوزيع اللوغاريتمي الطبيعي في توفيق بيانات مطالبات السيارات. واهتمت دراسة (Packová, 2014) بالحصول على نموذج احتمالى لنمذجة خسائر التأمين حيث تم استخدام توزيع جاما والتوزيع اللوغاريتمي الطبيعي وتوزيع ويبل لنمذجة الخسائر. وقارنت دراسة (Xacure et al., 2015) بين توزيع تويدى Tweedie distribution (توزيع بواسون – جاما المركب) وبين استخدام التحليل المنفصل لكلا من تكرار المطالبات وحجم المطالبات. واهتمت دراسة (Pacáková, 2016) بتوفيق بيانات الخسائر باستخدام توزيع باريتو من خلال نموذج الخطر التجميعى Collective risk model . وقام (Omari et al., 2018) بنمذجة تكرار المطالبات باستخدام توزيع متقطع، ونمذجة حجم المطالبة باستخدام توزيع متصل.

واهتمت بعض الدراسات بالبيانات التي تحتوي على أصفار زائدة حيث قدم (Nanjundan et al., 2018) توزيع جاما المتضخم الأصفار Zero-inflated gamma وأوضح أنه يمكن استخدامه في نظرية صفوف الانتظار عندما لا يوجد زمن انتظار لتلقى الخدمة. واستخدم (Hazra et al., 2018) التوزيع الأسى متضخم الأصفار Zero-inflated Exponential distribution في تحليل الأمطار الأسبوعية في الهند حيث كانت البيانات تحتوى على العديد من الأصفار. واستخدم (Huang et al., 2019) التوزيع الأسى متضخم الأصفار في حوادث تصادم السفن لحساب معدلات الاصابة الجسدية بعد أن أجرى تعديلا على مدى التوزيع ليصفح من الصفر للواحد الصحيح. وقدم (Rivas et al., 2021) توزيع وارينج متضخم الأصفار Zero- Waring distribution inflated ، وأوضح أنه يلائم البيانات التي تحتوى على أصفار زائدة، ويصلح هذا التوزيع لنمذجة البيانات التي فشل توزيع وارينج Waring distribution في نمذجتها. واهتم (de Freitas Costa et al., 2021) بتقديم توزيع ويبل المتضخم الأصفار لاستخدامه في الدراسات البيئية.

واهتمت بعض الدراسات العربية بتسعير تأمين السيارات ونمذجة تكرار المطالبات وحجم المطالبة، حيث قدم (أحمد وآخرون، ١٩٩٢) نموذج كمي لتسعير التأمين التكميلي للسيارات من خلال تحديد التوزيع الاحتمالي المناسب لعدد وقيم الخسائر وتحديد العوامل المؤثرة في درجة الخطورة. كذلك قدمت دراسة (الفقى، ١٩٩٣) استخدام نموذج حاصل الضرب ذات المتغيرات المتعددة في تقدير عدد المطالبات لتأمين السيارات. واهتم (أحمد، ١٩٩٣) بترشيد قرارات التسعير

في التأمينات العامة بالتطبيق على تأمين السيارات من خلال استخدام التوزيعات الاحتمالية. وقدم (سالم، ١٩٩٧) تسعير تأمين الممتلكات باستخدام التحليل التتابعي للفروق بين التعويضات المقدرة والتعويضات الفعلية. واهتمت دراسة (البلقيني وآخرون، ١٩٩٩) باستخدام نظرية المصداقية في تسعير المسئولية المدنية عن حوادث السيارات في مصر، واهتم (مهدى وآخرون، ٢٠١٠) بتقديم نماذج بديلة لتسعير تأمين السيارات التكميلي باستخدام تقدير بييز للوصول إلى معادلة المصداقية التي يتم استخدامها في تسعير تأمين السيارات التكميلي. واستخدم (ابراهيم، ٢٠١٤) الدمج بين النماذج المالية والنماذج الاكتوارية لتسعير التأمين الشامل على السيارات الملاكى. واستخدم (الحصرى وآخرون، ٢٠١٧) النماذج الخطية المعممة في تسعير تأمين السيارات الملاكى وركز على نموذج جاما ونموذج ذى الحدين السالب. وقدمت دراسة (عجوة وآخرون، ٢٠١٧) استخدام التوزيع الأسى المعمم Generalized exponential distribution لنمذجة مطالبات التأمين الهندسى كبديل لتوزيعى جاما وويبل وقدم البحث أيضا توزيع جمبل النوع الثانى Gumbel type 2 كأحد التوزيعات ذات الذيل الثقيل التي يمكن استخدامها في عملية النمذجة الاكتوارية. وقدم (عجوة، ٢٠١٩) دراسة عن استخدام توزيع بواسون ذى الأصفار المتضخمة وتوزيع هاردل بواسون في نمذجة تكرار المطالبات في تأمين السيارات. واستخدم (عجوة، ٢٠٢٠) نموذج مقلوب جاوس لنمذجة حجم المطالبات ونموذج بواسون ذى التشتت الزائد لمعالجة التشتت الزائد في بيانات تكرار المطالبات.

يقدم هذا البحث أسلوب جديد للتسعير وهو استخدام توزيع متصل يسمح بوجود الصفر في قيم الخسائر والتي تمثل عدم حدوث الحادث، وبذلك يتم دمج عدد مرات حدوث الحادث مع قيم الخسائر في توزيع شبه متصل semi-continuous distribution ليمثل حجم المطالبة الاجمالية في العام للوثيقة الواحدة.

٢. التوزيعات متضخمة الأصفار المستخدمة في الدراسة التطبيقية

يقترح الباحث استخدام التوزيعات المتضخمة الأصفار Zero-inflated distributions لنمذجة إجمالي المطالبات في العام للوثيقة الواحدة وفي حالة عدم التقدم بمطالبات يتم تسجيل قيمة المطالبة تساوى الصفر، وبعد ذلك يتم حساب متوسط المطالبات وتطبيق معادلة التسعير للوصول إلى سعر التأمين الصافي. ويمكن توضيح التوزيعات المتضخمة الأصفار المستخدمة في الدراسة كالتالي:

(٢. ١) التوزيع الأسى المتضخم الأصفار zero-inflated exponential distribution

يمكن لأى توزيع متصل عمل التوزيع المتضخم الأصفار الخاص به من خلال الصيغة التالية (de Freitas Costa et al., 2021):

$$f_0(x)\begin{cases} p_0 & x=0 \\ (1-p_0)f(x) & x>0 \end{cases} \qquad (2.1.1)$$

حيث $f_0(x)$ هى دالة كثافة الاحتمال للتوزيع المتضخم الأصفار ، $f(x)$ هى دالة كثافة الاحتمال للتوزيع الأصلى، p_0 هى نسبة الأصفار الموجودة بالبيانات.

ولأغراض التبسيط في هذا البحث، يتم افتراض أن $p=(1-p_0)$

وتكون دالة كثافة الاحتمال للتوزيع الأسى متضخم الأصفار كالتالى:

$$f(x) = \begin{cases} (1-p) & x = 0 \\ \frac{p}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} & x > 0 \end{cases} \qquad (2.1.2)$$

وتمثل المعلمة p نسبة المطالبات غير الصفرية، والمعلمة $0 < \theta$ هي التي تتحكم في تشتت التوزيع scale parameter.

ويمكن حساب دالة التوزيع distribution function Hazra, et al., (2018) كالتالى:

$$F(x) = (1-p) + p\left(1 - e^{-\frac{x}{\theta}}\right) \qquad x \geq 0 \qquad (2.1.3)$$

ويمكن حساب متوسط التوزيع الأسى المتضخم الأصفار من المبادئ الأولية كالتالى:

$$E(x) = 0 * (1-p) + \int_{0}^{\infty} x \frac{p}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} \quad dx$$

وباستخدام التكامل بالتجزئ يمكن حساب المتوسط كالتالى:

$$let\ u(x) = x \qquad \acute{u}(x) = 1$$

$$\acute{v}(x) = e^{-\frac{x}{\theta}} \qquad v(x) = -\theta e^{-\frac{x}{\theta}}$$

$$E(x) = \frac{p}{\theta}\left(-\theta x e^{-\frac{x}{\theta}} \Big| \begin{matrix} 0 \\ \infty \end{matrix}\right) - \frac{p}{\theta}\int_{0}^{\infty} -\ \theta e^{-\frac{x}{\theta}} \quad dx$$

$$E(x) = p\theta \qquad (2.1.4)$$

ويمكن حساب العزم الثانى حول الصفر كالتالى:

$$E(x^2) = 0^2 * (1-p) + \int_{0}^{\infty} x^2 \frac{p}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} \quad dx$$

وباستخدام التكامل بالتجزئ مرتين يمكن الوصول للعزم الثانى حول الصفر كالتالى:

$$E(x^2) = 2p\theta^2$$

ويكون التباين من المبادئ الأولية:

$$Var(x) = 2p\theta^2 - p^2\theta^2$$

$$Var(x) = p\theta^2(2-p) \qquad (2.1.5)$$

(٢. ٢) توزيع باريتو المتضخم الأصفار Zero-inflated Pareto distribution

يمكن اشـــتقاق دالة كثافة الاحتمال لتوزيع باريتو المتضـــخم الأصـــفار باســـتخدام المعادلة (2.1.1) مع افتراض أن $p = (1 - p_0)$:

$$f_0(x) = \begin{cases} (1-p) & x = 0 \\ \dfrac{p\alpha\lambda^{\alpha}}{(\lambda+x)^{\alpha+1}} & x > 0 \end{cases} \qquad (2.2.1)$$

حيث $\lambda > 0$, $\alpha > 0$

وباستخدام المبادئ الأولية يمكن اشتقاق دالة التوزيع distribution function كالتالى:

$$F(x) = (1+p) + \int_0^x \frac{p\alpha\lambda^{\alpha}}{(\lambda+y)^{\alpha+1}} \quad dy$$

$$F(x) = (1-P) + p\left(1-\left(\frac{\lambda}{\lambda+x}\right)^{\alpha}\right) \qquad (2.2.2)$$

يمكن حساب متوسط وتباين توزيع باريتو المتضخم الأصفار من المبادئ الأولية كالتالى:

$$E(x) = 0*(1-p) + \int_0^{\infty} \frac{p\alpha\lambda^{\alpha}x}{(\lambda+x)^{(\alpha+1)}} \quad dx$$

$$E(x) = p\int_0^{\infty} x.\frac{\alpha\lambda^{\alpha}}{(\lambda+x)^{(\alpha+1)}} \quad dx$$

باستخدام التكامل بالتجزئ يمكن حل هذا التكامل

$$let\ u(x) = x \qquad \acute{u}(x) = 1$$

$$\acute{v}(x) = \frac{\alpha\lambda^{\alpha}}{(\lambda+x)^{(\alpha+1)}} \qquad v(x) = -\frac{\lambda^{\alpha}}{(\lambda+x)^{\alpha}}$$

$$E(x) = p\left(-x.\frac{\lambda^{\alpha}}{(\lambda+x)^{\alpha}}\bigg|\begin{matrix}\infty\\0\end{matrix}\right) - p\int_0^{\infty} -\frac{\lambda^{\alpha}}{(\lambda+x)^{\alpha}} \quad dx$$

$$E(x) = 0 + p\frac{\lambda}{(\alpha-1)}\int_0^{\infty}\frac{(\alpha-1)\lambda^{(\alpha-1)}}{(\lambda+x)^{\alpha}} \qquad dx$$

المقدار داخل حدود التكامل عبارة عن دالة توزيع باريتو بمعلمتى ($\lambda, (\alpha-1)$) وهذا يعنى أن تكامله يساوى الواحد الصحيح.

$$E(x) = \frac{p\lambda}{(\alpha-1)} \qquad (2.2.3)$$

وحتى يمكن الحصول على قيمة متوسط توزيع باريتو المتضخم الأصفار يجب أن تكون قيمة α أكبر من الواحد الصحيح.

ويمكن الحصول على العزم الثانى حول الصفر لتوزيع باريتو المتضخم الأصفار كالتالى:

$$E(x^2) = 0^2 * (1-p) + \int_0^\infty x^2 . \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda+x)^{(\alpha+1)}} \quad dx$$

باستخدام التكامل بالتجزئ مرتين يمكن الحصول على قيمة العزم الثانى حول الصفركالتالى:

$$E(x^2) = \frac{2p\lambda^2}{(\alpha-1)(\alpha-2)} \qquad (2.2.4)$$

وبذلك يمكن الحصول على تباين توزيع باريتو المتضخم الأصفار من المبادئ الأولية باستخدام المعادلتين (2.2.3) ، (2.2.4) كالتالى:

$$Var(x) = \frac{2p\lambda^2}{(\alpha-1)(\alpha-2)} - \left(\frac{p\lambda}{\alpha-1}\right)^2$$

$$Var(x) = \frac{2p\lambda^2(\alpha-1) - p^2\lambda^2(\alpha-2)}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)} \qquad (2.2.5)$$

ولحساب التباين لتوزيع باريتو المتضخم الأصفار يجب أن تكون قيمة α أكبر من (2) .

(٢. ٣) توزيع ويبل متضخم الأصفار

يمكن استخدام المعادلة (2.1.1) لاشتقاق دالة كثافة الاحتمال لتوزيع ويبل المتضخم الأصفار.

$$f(x) = \begin{cases} (1-p) & x = 0 \\ pc\gamma x^{\gamma-1}e^{-cx^\gamma} & x > 0 \end{cases} \qquad (2.3.1)$$

وتمثل المعلمة c معلمة scale parameter ، والمعلمة γ هى معلمة الشكل shape parameter .

يمكن اشتقاق دالة التوزيع لتوزيع ويبل متضخم الأصفار من المبادئ الأولية كما وردت عن de Freitas Costa et al., (2021):

$$F(x) = p(x=0) + \int_0^x f(y) \quad dy$$

$$F(x) = (1-p) + p\int_0^y c\gamma y^{\gamma-1}e^{-cy^\gamma} \qquad dy$$

$$F(x) = (1-p) + p\left(1 - e^{-cx^\gamma}\right) \quad (2.3.2)$$

يمكن حساب متوسط وتباين توزيع ويبل المتضخم الأصفار كالتالى:

$$E(x) = 0 * (1-p) + \int_0^\infty xpc\gamma x^{\gamma-1} e^{-cx^\gamma} \qquad dx$$

$$E(x) = p \int_0^\infty pc\gamma x^\gamma e^{-cx^\gamma} \qquad dx$$

$$put \quad y = x^\gamma \quad x = y^{\frac{1}{\gamma}} \qquad dy = \gamma x^{\gamma-1} dx$$

$$E(x) = p \int_0^\infty cy^{\frac{1}{\gamma}} e^{-cy} \qquad dy$$

$$E(x) = p \left(\frac{1}{c}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \int_0^\infty (cy)^{\frac{1}{\gamma}} e^{-cy} \qquad d(cy)$$

$$E(x) = p \left(\frac{1}{c}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \Gamma\left(\frac{1}{\gamma} + 1\right) \qquad (2.3.3)$$

ويمكن الحصول على العزم الثانى حول الصفر كالتالى:

$$E(x^2) = 0 * (1-p) + p \int_0^\infty x^2 . f(x) \qquad dx$$

$$E(x^2) = p \int_0^\infty x^2 c\gamma x^{\gamma-1} e^{-cx^\gamma} \qquad dx$$

$$put \quad y = x^\gamma \quad x = y^{\frac{1}{\gamma}} \qquad dy = \gamma x^{\gamma-1}$$

$$E(x^2) = p \int_0^\infty cy^{\frac{2}{\gamma}} e^{-cy} \qquad dy$$

$$E(x) = p \left(\frac{1}{c}\right)^{\frac{2}{\gamma}} \int_0^\infty (cy)^{\frac{2}{\gamma}} e^{-cy} \qquad d(cy)$$

$$E(x^2) = p \left(\frac{1}{c}\right)^{\frac{2}{\gamma}} \Gamma\left(\frac{2}{\gamma} + 1\right) \qquad (2.3.4)$$

وبذلك يمكن الحصول على تباين توزيع ويبل المتضخم الأصفار كالتالى:

$$var(x) = p\left(\frac{1}{c}\right)^{\frac{2}{\gamma}}\left[\Gamma\left(\frac{2}{\gamma}+1\right) - p\left(\Gamma\left(\frac{2}{\gamma}+1\right)\right)^2\right] \quad (2.3.5)$$

٣. طريقة التقدير المستخدمة والاختبارات

(٣. ١) طريقة التقدير المستخدمة

يتم اســتخدام طريقة المئويات percentile method لتقدير المعلمات المجهولة في الثلاثة توزيعات متضـخمة الأصـفار المسـتخدمة في تحليل البيانات نظرا لأن هذه الطريقة تلائم التوزيعات ذات الذيل الثقيل (Pekasiewicz, 2014) ولا سـيما لأن المطالبات غير الصـفرية تتركز عند ذيل التوزيع.

(٣. ٢) اختبار جودة التوفيق المستخدم

يتم اســتخدام اختبار كولومجروف ســمرنوف لاختبار جودة التوفيق للتوزيعات المســتخدمة لتوفيق بيانات المطالبات

(٣. ٣) الاختيار بين التوزيعات المختلفة المستخدمة في الدراسة

يتم استخدام معيار (Akaike's Information Criterion) (AIC) ومعيار (Schwarz Bayesian Information Criterion (BIC)) للمفاضـــلة بين التوزيعات التي أثبتت اختبارات جودة التوفيق صـــلاحيتها لتمثيل البيانات، ويمكن حســـاب المعيارين باســـتخدام الصـــيغ التالية (Maydeu-Olivares et al., 2010):

$$AIC = -2\ln(L) + 2K \quad (3.3.1)$$

$$BIC = -2\ln(L) + 2.\ln(n) \quad (3.3.2)$$

حيث:

$\ln(L)$: هو لوغاريتم دالة الامكان الأعظم بعد التعويض عن المعلمات المجهولة و قيم البيانات الأخرى.

K : عدد المعلمات المقدرة

$\ln(n)$: لوغاريتم عدد المشاهدات

التوزيع الذي يكون له أقل قيمة لمعيار AIC أو معيار BIC يكون هو الأفضـــل في تمثيل البيانات.

(٣- ٤) تحديد السعر الصافي لتأمين السيارات التكميلي

يتم حســـاب المطالبات الاجمالية المتوقعة للوثيقة الواحدة باســـتخدام المعادلة التالية (ســـالم، ٢٠١٥):

$$ETC_{policy} = E(x) + K.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (3.4.1)$$

حيث:

ETC_{policy} : هو إجمالي المطالبات المتوقعة للوثيقة الواحدة

$E(x)$: هو متوســط التوزيع المختار الذي يمثل قيمة المطالبة الاجمالية المتوقعة للوثيقة في العام

n : عدد الوثائق في المحفظة $n = 9450$

K : الدرجة المعيارية المستخرجة من جدول χ^2 عند مستوى المعنوية المحدد، نظرا لأن قيم المطالبات تتبع توزيع ملتوى ناحية اليمين حيث:

$$K = \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 \approx \chi^2_{(1)}$$

مع ملاحظة أن الدرجة المعيارية عند اســتخدام توزيع مربع كاى بدرجة حرية واحدة وعند مستوى معنوية 1% هى 6.63

ويتم إيجاد إجمالي قيم المطالبات الكلية المتوقعة للمحفظة عن طريق ضـــرب إجمالي المطالبات المتوقعة للوثيقة الواحدة في عدد الوثائق في المحفظة.

$$ETC_{portfolio} = ETC_{policy} \times \mathrm{n} \qquad (3.4.2)$$

حيث

$ETC_{portfolio}$: هو إجمالي المطالبات المتوقعة للمحفظة

ETC_{policy}: هو إجمالي المطالبات المتوقعة للوثيقة الواحدة

n هي عدد الوثائق في المحفظة.

وعند حســاب ســعر التأمين يجب الأخذ في الاعتبار معدل التضــخم ومعدل الفائدة، ســالم (٢٠١٥) ، لذلك يمكن حساب سعر التأمين الصافي بالصيغة التالية:

$$Rate = \frac{ETC_{portfolio}.\,(1+f)^{\frac{1}{2}}}{\sum_{i=1}^{n} A_i \ \ (1+i)^{\frac{1}{2}}} \qquad (3.4.3)$$

حيث:

$ETC_{portfolio}$: هو إجمالي المطالبات المتوقعة للمحفظة.

A_i : هو مبلغ التأمين للوثيقة رقم i

$\sum_{i=1}^{n} A_i$: هو مجموع مبالغ التأمين في المحفظة.

f هو معدل التضخم المأخوذ في الاعتبار،

i هو معدل الفائدة المأخوذ في الاعتبار.

n : هى عدد الوثائق بالمحفظة.

وتم افتراض أن مدة الوثيقة الواحدة سنة لذلك تم حساب التضخم والخصم لمدة نصف سنة في المتوسط.

٤. الدراسة التطبيقية

تم الاعتماد على احدى قواعد بيانات تأمين السيارات التكميلي بإحدى شركات التأمين المصرية، والجدول التالى يوضح الخصائص الأساسية للبيانات.

جدول (٤- ١) المقاييس الاحصائية للبيانات محل الدراسة

المقياس الاحصائى	القيمة
عدد الوثائق	9450
عدد الوثائق التي لم تتقدم بمطالبات	8889
عدد الوثائق التي تقدمت بمطالبات	561
المتوسط المحسوب من البيانات	392
التباين المحسوب من البيانات	10568252
أقل قيمة للمطالبات	0
أعلى قيمة للمطالبات	144784.5
قيمة 94% percentile	0
قيمة 95% percentile	473.75
قيمة 99.99999% percentile	144779.0822
نسبة المطالبات الصفرية	0.94
نسبة المطالبات غير الصفرية	0.06
مجموع المطالبات غير الصفرية $\sum_{i=n-n_0}^{n} x_i$	3707682
مجموع مبالغ التأمين في المحفظة	493499603

وكما يتضح من جدول (٤- ١) أن عدد وثائق تأمين السيارات التكميلي في البيانات محل الدراسة هو 9450 وثيقة، وعدد المطالبات الصفرية 8889 مطالبة، فهذا يعنى أنه أكثر من 94% من المطالبات في البيانات محل الدراسة مطالبات صفرية، وبذلك تكون المطالبات غير الصفرية حوالى 6% من المطالبات. وبذك تكون أقل قيمة للمطالبة هى صفر، وأعلى قيمة للمطالبة هى 144779.0822 جنيه. ويوضح الجدول أيضا متوسط المطالبات المحسوب من البيانات وهو 392.347 جنيه، ويشير الجدول أيضا إلى أن التباين المحسوب من البيانات يساوى 10568252 وهو يوضح التشتت الكبير الموجود في البيانات نتيجة وجود أصفار ونتيجة وجود قيم غير متجانسة

في قيم المطالبات غير الصفرية. ويوضح الجدول أيضا قيم percentiles عند نسب معينة حتى يتم استخدامها في تقدير المعلمات المجهولة في التوزيعات محل الدراسة، ويعرض الجدول مجموع قيم المطالبات غير الصفرية، وكذلك مجموع مبالغ التأمين في المحفظة محل الدراسة.

(٤- ١) تقدير المعلمات المجهولة للتوزيع الأسى المتضخم الأصفار باستخدام طريقة المئويات

لتقدير المعلمات المجهولة باستخدام طريقة المئويات يتم مساواة قيم المئوي المحسوب من البيانات مع صيغة دالة التوزيع التراكمى للتوزيع الأسى المتضخم الأصفار عند القيمة التي يمثلها المئوي والموضحة في جدول (٤-١) ، ونظرا لأن المعلمات المجهولة هما معلمتان لذلك نحتاج إلى مئويين من البيانات فقط حيث يتم اختيار المئوي %94 لأن نسبة المطالبات الصفرية في البيانات تساوى %94 تقريبا، ويتم اختيار المئوي %99.99999 حتى يمكن رؤية أكبر قدر من البيانات غير الصفرية.

باستخدام دالة التوزيع الأسى المتضخم الأصفار والموضحة في المعادلة رقم (2.1.3) يمكن كتابة المعادلات الدالة على المئويات المحسوبة من البيانات:

$$F(0) = (1-p) = 0.94 \qquad (4.1.1)$$

$$F(144779.0822) = (1-p) + p\left(1 - e^{-\frac{144779.0822}{\theta}}\right)$$
$$= 0.9999999 \quad (4.1.2)$$

من المعادلة (4.1.1) يمكن الحصول على قيمة $p = 0.06$

بالتعويض بقيمة p في المعادلة (4.1.2) مع التبسيط نحصل على المعادلات التالية:

$$e^{-\frac{144779.0822}{\theta}} = 0.0000017$$

بأخذ لوغاريتم الطرفين يمكن الحصول على قيمة θ

$$\hat{\theta} = 10898.03$$

وبذلك تكون معلمات التوزيع الأسى المتضخم الأصفار المقدرة كالتالى:

$$\hat{p} = 0.06 \qquad \hat{\theta} = 10898.03 \quad (4.1.3)$$

بعد الحصول على قيم معلمات التوزيع الأسى المتضخم الأصفار يتم حساب الاحتمالات التراكمية باستخدام صيغة دالة التوزيع، ومقارنتها بالاحتمالات التراكمية المحسوبة من البيانات. ويتم استخدام اختبار كولمجروف سمرنوف لاختبار جودة توفيق التوزيع المختار.

وبعد اجراء اختبار كولومجروف سمرنوف فإن أعلى فرق مطلق هو 0.016443، وعند مستوى معنوية %1 فإن القيمة الجدولية لاختبار كولومجروف سمرنوف عندما يكون حجم العينة *9450* هو 0.01676 ، ونظرا لأن القيمة المحسوبة أقل من القيمة الجدولية لذلك لا يمكن رفض الفرض العدمي الذي يقضى بتبعية البيانات للتوزيع الأسى المتضخم الأصفار، وكما هو ملاحظ من أن القيمة المحسوبة قريبة جدا من القيمة الجدولية لذلك يجب البحث عن توزيع آخر أكثر ملائمة.

(٤-٢) تقدير المعلمات المجهولة لتوزيع باريتو متضخم الأصفار باستخدام طريقة المئويات

لتقدير المعلمات المجهولة باستخدام طريقة المئويات يتم مساواة قيم المئوي المحسوب من البيانات مع صيغة دالة التوزيع التراكمى لتوزيع باريتو المتضخم الأصفار عند القيمة التي يمثلها المئوي والموضحة في جدول (٤-١) ، ونظرا لأن المعلمات المجهولة عددها ثلاث معلمات لذلك نحتاج ثلاث مئويا ت من البيانات ويمكن توضيح ذلك كالتالى:

$$F(0) = (1-p) = 0.94 \qquad (4.2.1)$$

$$F(473.75) = (1-p) + p\left(1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + 473.75}\right)^{\alpha}\right) = 0.95 \qquad (4.2.2)$$

$$F(144779.0822) = (1-p) + p\left(1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + 473.75}\right)^{\alpha}\right) = 0.9999999 \qquad (4.2.3)$$

من المعادلة (4.2.1) يمكن حساب قيمة $p = 0.06$ ، والتعويض بقيمة p في المعادلتين (4.2.2) ، (4.2.3) وبعد التبسيط نحصل على المعادلتين التاليتين:

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda + 473.75}\right)^{\alpha} = \frac{5}{6} \qquad (4.2.4)$$

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda + 144779.0822}\right)^{\alpha} = 0.0000017 \qquad (4.2.5)$$

بأخذ لوغاريتم الطرفين للمعادلتين (3.2.4) ، (3.2.5) نحصل على المعادلتين التاليتين

$$\alpha. \ln\left(\frac{\lambda}{\lambda + 473.75}\right) = \ln\left(\frac{5}{6}\right) \qquad (4.2.6)$$

$$\alpha. ln\left(\frac{\lambda}{\lambda + 144779.0822}\right) = \ln(0.0000017) \qquad (4.2.7)$$

بقسمة المعادلة (4.2.6) على المعادلة (4.2.7)

$$\frac{\ln\left(\frac{\lambda}{\lambda + 473.75}\right)}{ln\left(\frac{\lambda}{\lambda + 144779.0822}\right)} = 0.01372399 \qquad (4.2.8)$$

ويمكن حل المعادلة (4.2.8) باستخدام برنامج MathCad والحصول على قيمة

$$\hat{\lambda} = 13410$$

وبالتعويض عن قيمة λ في المعادلة رقم (4.2.6) يمكن الحصول على قيمة α

وتكون معلمات توزيع باريتو المتضخم الأصفار المقدرة كالتالى:

$$\hat{p} = 0.06 \qquad \hat{\lambda} = 13410 \qquad \hat{\alpha} = 5.2514 \qquad (4.2.9)$$

بعد الحصـــول على قيم معلمات توزيع باريتو المتضـــخم الأصـــفار يتم حســـاب الاحتمالات التراكمية باســـتخدام صـــيغة دالة التوزيع، ومقارنتها بالاحتمالات التراكمية المحســـوبة من البيانات. ويتم استخدام اختبار كولومجروف سمرنوف لاختبار جودة توفيق التوزيع المختار.

وبعد اجراء اختبار كولومجروف ســـمرنوف فإن أعلى فرق مطلق هو 0.011381 ، وعند مســـتوى معنوية 1% فإن القيمة الجدولية لاختبار كولومجروف ســـمرنوف عندما يكون حجم العينة *9450* هو *0.01676* ، ونظرا لأن القيمة المحســـوبة أقل من القيمة الجدولية لذلك لا يمكن رفض الفرض العدمي الذي يقضى بتبعية البيانات لتوزيع باريتو المتضخم الأصفار.

وكما هو ملاحظ أن القيمة المحســـوبة قريبة من القيمة الجدولية لذلك يجب البحث عن توزيع آخر أكثر ملائمة.

(٤-٣) تقدير المعلمات المجهولة لتوزيع ويبل متضخم الأصفار باستخدام طريقة المئويات percentile method

لتقدير المعلمات المجهولة باســـتخدام طريقة المئويات يتم مســـاواة قيم المئوي المحســـوب من البيانات مع صـــيغة دالة التوزيع التراكمى لتوزيع ويبل المتضـــخم الأصـــفار عند القيمة التي يمثلها المئوي والموضـــحة في جدول (٣-١) ، ونظرا لأن المعلمات المجهولة عددها ثلاث معلمات لذلك نحتاج ثلاث مئويا ت من البيانات ويمكن توضيح ذلك كالتالى:

$$F(0) = (1-p) = 0.94 \qquad (4.3.1)$$

$$F(473.75) = (1-p) + p\left(1 - e^{-c(473.75)^{\gamma}}\right) = 0.95 \qquad (4.3.2)$$

$$F(144779.0822) = (1-p) + p\left(1 - e^{-c(144779.0822)^{\gamma}}\right) = 0.9999999 \qquad (4.3.3)$$

من المعادلة (4.3.1) يمكن إيجاد قيمة $p = 0.06$

وبالتعويض عن قيمة p في المعادلتين (4.3.2) ، (4.3.3) يمكن الحصـــول على المعادلتين التاليتين:

$$0.94 + 0.06\left(1 - e^{-c(473.75)^{\gamma}}\right) = 0.95 \qquad (4.3.4)$$

$$0.94 + 0.06\left(1 - e^{-c(144779.0822)^{\gamma}}\right) = 0.9999999 \qquad (4.3.5)$$

وبحل المعادلتين نحصل على قيم المعلمات المجهولة كالتالى:

$$\hat{p} = 0.06 \qquad \hat{\gamma} = 0.74976 \qquad \hat{c} = 0.001798 \qquad (4.3.6)$$

بعد الحصـــول على قيم معلمات توزيع ويبل المتضـــخم الأصـــفار يتم حســـاب الاحتمالات التراكمية باســـتخدام صـــيغة دالة التوزيع، ومقارنتها بالاحتمالات التراكمية المحســـوبة من البيانات. ويتم استخدام اختبار كولومجروف سمرنوف لاختبار جودة توفيق التوزيع المختار.

وبعد اجراء اختبار كولومجروف سـمرنوف فإن أعلى فرق مطلق هو *0.003347* ، وعند مسـتوى معنوية 1% فإن القيمة الجدولية لاختبار كولومجروف سـمرنوف عندما يكون حجم العينة *9450* هو *0.01676* ، ونظرا لأن القيمة المحسـوبة أقل من القيمة الجدولية لذلك لا يمكن رفض الفرض العدمي الذي يقضى بتبعية البيانات لتوزيع ويبل المتضخم الأصفار.

جدول (٤-٢) ملخص نتائج توفيق البيانات

ملخص النتائج	التوزيع الأسى المتضخم الأصفار	توزيع باريتو المتضخم الأصفار	توزيع ويبل المتضخم الأصفار
تقدير المعلمة الأولى	$\hat{p} = 0.06$	$\hat{p} = 0.06$	$\hat{p} = 0.06$
تقدير المعلمة الثانية	$\hat{\theta} = 10898.03$	$\hat{\alpha} = 5.2514$	$\hat{c} = 0.001798$
تقدير المعلمة الثالثة	-	$\hat{\lambda} = 13410$	$\hat{\gamma} = 0.74976$
أعلى فرق مطلق	*0.016443*	*0.011381*	*0.003347*
القيمة الجدولية لاختبار كولومجروف سمرنوف *(1%)*	*0.01676*	*0.01676*	*0.01676*

وكما يتضح من جدول (٤-٢) أنه بالنسبة للثلاثة توزيعات المستخدمة في الدراسة لا يمكن رفض الفرض العدمي الذي يقضـى بتبعية البيانات لأى منهم، وكما يتضـح أن أقل فرق مطلق بين التوزيع التراكمى التجريبى والتوزيع التراكمى النظرى المحسـوب من توزيع ويبل المتضـخم الأصفار هو أقل فرق في الفروق المحسوبة، ولكن يجب استخدام معيار احصائى آخر يمكن الاختيار بين التوزيعات الثلاثة من خلاله.

(٤. ٤) الاختيار بين التوزيعات المختلفة

يتم اسـتخدام معيارى AIC، BIC للمفاضـلة بين التوزيعات التي أثبتت اختبارات جودة التوفيق صلاحيتها.

(٤. ٤. ١) حساب معيارى AIC، BIC للتوزيع الأسى متضخم الأصفار

يمكن ايجاد صيغة دالة الامكان الأعظم للتوزيع الأسى متضخم الأصفار باستخدام المعادلة (2.1.3) كالتالى:

$$L = (1-p)^{n_0} \left(\frac{p}{\theta}\right)^{(n-n_0)} e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=n-n_0}^{n} x_i} \qquad (4.4.1)$$

بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس الطبيعي e للمعادلة (4.4.1)

$$\ln(L) = n_0 \ln(1-p) + (n-n_0)\ln\left(\frac{p}{\theta}\right) - \frac{1}{\theta}\sum_{i=n-n_0}^{n} x_i \qquad (4.4.2)$$

حيث n_0 تمثل عدد المطالبات الصفرية، n تمثل عدد المطالبات الكلية، $(n-n_0)$ تمثل عدد المطالبات غير الصفرية، p ، θ هى معلمات التوزيع الأسى المتضخم الأصفار المقدرة

وباستخدام البيانات الموجودة في جدولي (٤-١) ، (٤-٢) يمكن حساب قيمة لوغاريتم دالة الامكان الأعظم للتوزيع الأسى المتضخم الأصفار.

$$\ln(L) = -8773.672235$$

وباستخدام المعادلتين (3.3.1)، (3.3.2) يمكن حساب قيم معيارى AIC ، BIC كالتالى:

$$AIC = 17551.34$$

$$BIC = 17565.67$$

(٤. ٤. ٢) حساب معيارى AIC، BIC لتوزيع باريتو المتضخم الأصفار

يمكن ايجاد صيغة دالة الامكان الأعظم لتوزيع باريتو المتضخم الأصفار باستخدام المعادلة (2.2.1) كالتالى:

$$L = (1-p)^{n_0} p^{(n-n_0)} \alpha^{(n-n_0)} \lambda^{\alpha(n-n_0)} \prod_{i=n-n_0}^{n} (\lambda + x_i)^{-(\alpha+1)} \qquad (4.4.3)$$

بأخذ لوغاريتم الطرفين للمعادلة (4.4.3)

$$\ln(L) = n_0 \ln(1-p) + (n-n_0)\ln(p) + \alpha(n-n_0)\ln(\lambda) - (\alpha+1)\sum_{i=n-n_0}^{n} ln(\lambda + x_i) \qquad (4.4.4)$$

حيث n_0 تمثل عدد المطالبات الصفرية، n تمثل عدد المطالبات الكلية، $(n-n_0)$ تمثل عدد المطالبات غير الصفرية، p ، α ، λ هى معلمات توزيع باريتو المتضخم الأصفار المقدرة.

وباستخدام البيانات الموجودة في جدولي (٤-١) ، (٤-٢)، وحساب المقدار $\sum_{i=n-n_0}^{n} ln(\lambda + x_i)$ باستخدام برنامج *Excel* يمكن حساب قيمة لوغاريتم دالة الامكان الأعظم لتوزيع باريتو المتضخم الأصفار.

$$\sum_{i=n-n_0}^{n} ln(\lambda + x_i) = 5511.986$$

$$\ln(L) = -3269.366$$

وباستخدام المعادلتين (3.3.1) ،(3.3.2) يمكن حساب قيم معيارى AIC ، BIC كالتالى:

$$AIC = 6544.73$$

$$BIC = 6566.13$$

(٤. ٤. ٣) حساب معيارى AIC، BIC لتوزيع ويبل المتضخم الأصفار

يمكن ايجاد صيغة دالة الامكان الأعظم لتوزيع ويبل المتضخم الأصفار باستخدام المعادلة (2.3.1) كالتالى:

$$L = (1-p)^{n_0} p^{(n-n_0)} c^{(n-n_0)} \gamma^{(n-n_0)} \prod_{i=(n-n_0)}^{n} x_i^{(\gamma-1)} e^{-c \sum_{(n-n_0)}^{n} x_i^{\gamma}}$$

(4.4.5)

بأخذ لوغاريتم الطرفين للمعادلة (4.4.5)

$$\ln(L) = n_0 \ln(1-p) + (n-n_0)\ln(p) + (n-n_0)\ln(c) + (n-n_0)\ln(\gamma) + (\gamma-1)\sum_{i=(n-n_0)}^{n} \ln(x_i) - c\sum_{i=(n-n_0)}^{n} x_i^{\gamma} \qquad (4.4.6)$$

حيث n_0 تمثل عدد المطالبات الصـــفرية، n تمثل عدد المطالبات الكلية، $(n-n_0)$ تمثل عدد المطالبات غير الصفرية، p ، c ، γهى معلمات توزيع ويبل المتضخم الأصفار المقدرة.

وباستخدام البيانات الموجودة في جدولي (٤-١) ، (٤-٢) وحساب المقادير $\sum_{i=(n-n_0)}^{n} x_i^{\gamma}$ ، $\sum_{i=(n-n_0)}^{n} \ln(x_i)$ باستخدام برنامج Excel يمكن حساب لوغاريتم دالة الامكان.

$$\sum_{i=(n-n_0)}^{n} \ln(x_i) = 4421.364$$

$$\sum_{i=(n-n_0)}^{n} x_i^{\gamma} = 352977.9$$

$$\ln(L) = -8425.11$$

وباستخدام المعادلتين (3.3.1) ،(3.3.2) يمكن حساب قيم معيارى AIC ، BIC كالتالى:

$$AIC = 16856.22$$

$$BIC = 16868.52$$

جدول (٤. ٣) ملخص نتائج تطبيق معيارى *AIC* ، *BIC*

التوزيع	*معيار* AIC	*معيار* BIC
التوزيع الأسى المتضخم الأصفار	17551.34	17565.67
توزيع ويبل المتضخم الأصفار	16856.22	16868.52
توزيع باريتو المتضخم الأصفار	6544.73	6566.13

ويوضـــح جدول (٤- ٣) نتـائج تطبيق معيـارى *AIC* ، *BIC* على التوزيعـات التي أثبتت اختبارات جودة التوفيق صـلاحيتها لتمثيل البيانات محل الدراسـة. وكما يتضـح من الجدول أن توزيع ويبل المتضخم الأصفار أفضل قليلا من التوزيع الأسى متضخم الأصفار حيث إن قيمة كلا المعيارين أقل من مثيلاتهما في التوزيع الأســى المتضــخم الأصــفار. وكما هو ملاحظ أيضــا أن قيم المعيارين متقاربة في التوزيعين، وهذا يرجع إلى أن التوزيع الأســى المتضــخم الأصــفار هو حالة خاصــة من توزيع ويبل المتضــخم الأصــفار عندما تكون معلمة الشـكل *Shape parameter* مسـاوية للواحد الصحيح. وتوضح نتائج قيم المعيارين أن توزيع باريتو المتضخم الأصفار هو الأفضل لتمثيل بيانات الدراسـة حيث قيم المعيارين أقل بكثير من مثيلاتهم في التوزيع الأسـى المتضـخم الأصـفار وتوزيع ويبل المتضخم الأصفار.

(٤- ٥) حســـاب المطالبات الاجمالية الكلية لجميع الوثائق في المحفظة باســـتخدام توزيع باريتو المتضخم الأصفار

باسـتخدام المعادلات (2.2.3) ، (2.2.5) التي تمثل صـيغ المتوسـط والتباين لتوزيع باريتو المتضــخم الأصــفار، وجدول (٤- ٣) الذي يحتوى على المعلمات المقدرة لتوزيع باريتو المتضــخم الأصفار يمكن حساب قيم المتوسط والتباين والانحراف المعيارى لتوزيع باريتو المتضخم الأصفار.

$$E(x) = 189.26$$

$$Var(x) = 1525302.949$$

وبأخذ الجذر التربيعى للتباين يمكن الحصول على الانحراف المعيارى.

$$\sigma = 1235.03$$

وباستخدام المعادلة رقم (3.4.1) ، والقيمة المعيارية المستخرجة من جدول مربع كاى عند مستوى معنوية 1% هى 6.63 يمكن حساب المطالبات الاجمالية المتوقعة للوثيقة الواحدة كالتالى:

$$Total\ claims\ of\ a\ policy = 273.49$$

ويتم إيجاد إجمالي قيم المطالبات الكلية للمحفظة باستخدام المعادلة (3.4.2) :

$$Total\ claims\ of\ the\ portfolio = 273.49 \times 9450 = 2584480$$

وبافتراض أن معدل التضــخم *5%* ومعدل الفائدة *10%* ومدة الوثيقة ســنة واحدة، لذلك يتم تطبيق معدل الفائدة ومعدل التضخم عن نصف سنة في المتوسط، بذلك يمكن حساب سعر التأمين باستخدام المعادلة (3.4.3) كالتالى:

$$Rate = \frac{2584480 \times (1.05)^{\frac{1}{2}}}{493499603 \times (1.1)^{\frac{1}{2}}} = 0.00512$$

بذلك يكون الســعر الصــافي لتأمين السـيارات التكميلي وفقا لهذه المحفظة *0.00512* لوحدة النقود، ويكون السعر *5.12* جنيه لكل ألف جنيه.

٥. النتائج والتوصيات

(٥- ١) النتائج

بعد القيام بهذا البحث توصل الباحث إلى النتائج التالية:

(١) إن اســتخدام التوزيعات الاحتمالية المتضــخمة الأصــفار يمكنه حل مشـكلة عدم توافر بيانات عن عدد الحوادث التي تحققت في العام لكل وثيقة، خاصة إذا كانت نسبة المطالبات الصفرية كبيرة جدا كما هي في بيانات البحث (حوالى *94*% من إجمالي المطالبات هى مطالبات صفرية)

(٢) أمكن توفيق البيانات محل الدراسة باستخدام التوزيع الأسى المتضخم الأصفار، توزيع ويبل المتضــخم الأصــفار، وتوزيع باريتو المتضــخم الأصــفار، ووفقا لمعيارى *AIC*، *BIC* فإن توزيع باريتو المتضخم الأصفارهو الأفضل لتمثيل بيانات الدراسة.

(٣) يمكن حساب السعر الصافي لوثيقة تأمين السيارات التكميلي باستخدام متوسط وتباين توزيع باريتو المتضخم الأصفار والدرجة المعيارية المستخرجة من جداول توزيع مربع كاى نظرا لأن التوزيع الخاص بالمطالبات هو من التوزيعات الملتوية ناحية اليمين.

(٤) السعر الصافي لوثيقة تأمين السيارات التكميلي وفقا للبيانات المستخدمة في البحث هو *5.12* جنيه لكل *1000* جنيه من مبلغ التأمين.

(٥- ٢) التوصيات

بعد القيام بهذا البحث يوصى الباحث بالتوصيات الآتية:

(١) ضرورة الاهتمام بالتوزيعات المتضخمة الأصفار سواء المتصلة أو المتقطعة في تأمين السيارات نظرا لأن عدد المطالبات الصفرية عددها كبير في هذا النوع من التأمين.

(٢) اسـتمرار البحث في مجال النمذجة حتى يمكن الحصـول على نماذج أكثر دقة في تسـعير تأمين السيارات.

قائمة المراجع

١. ابراهيم، أحمد عبد الرحمن سيد احمد (١٩٩٧)، استخدام الدمج بين النماذج المالية والنماذج الاكتوارية في تسعير التأمين الشامل على السيارات الخصوصية بالسوق السعودى، مجلة البحوث المالية والتجارية، جامعة بور سعيد، كلية التجارة، ع٤، ص ص ٣٦٠-٤١٥.

٢. أحمد، ممدوح حمزة، أبو بكر، صفية أحمد، (١٩٩٢) استخدام نموذج حاصل الضرب في تسعير التأمين التكميلي للسيارات الخاصة حسب درجة خطورتها في ج.م.ع. ، المجلة المصرية للدراسات التجارية، جامعة المنصورة، كلية التجارة، مج١٦، ع٣، ص ص ٣٧٩-٤٠٦.

٣. أحمد، محمد كامل سيد، (١٩٩٣) ترشيد قرارات التسعير في التأمينات العامة نموذج كمي(إحصائي)- دراسة تطبيقية على تأمين أخطار السيارات ، المجلة المصرية للدراسات التجارية، جامعة المنصورة، كلية التجارة، مج١٧، ع٣، ص ص ٣٧٣-٣٩٤.

٤. البلقينى، محمد توفيق اسماعيل، ابراهيم، رأفت أحمد على،(١٩٩٩) استخدام نظرية المصداقية في تسعير التأمين من المسئولية المدنية عن حوادث السيارات في مصر، المجلة المصرية للدراسات التجارية، جامعة المنصورة، كلية التجارة، مج٢٣، ع١، ص ص ٥٦٣-٥٨٠.

٥. الحصرى، محمد حسن سيد، ابراهيم، محمد غازى صابر،(٢٠١٧) استخدام النماذج الخطية المعممة في تسعير تأمين السيارات التكميلي، مجلة البحوث الادارية، أكاديمية السادات للعلوم الادارية، مركز الاستشارات والبحوث والتطوير، مج٣٥، ع٢، ص ص ٣٥-١٠٥.

٦. سالم، محمود(١٩٩٧)، تسعير تامين الممتلكات باستخدام التحليل التتابعى للفروق بين التعويضات المقدرة والتعويضات الفعلية، ، مجلة آفاق جديدة، كلية التجارة، جامعة المنوفية، العدد الثالث.

٧. سالم، محمود(٢٠١٥)، رياضيات التأمينات العامة –النماذج الرياضية والاحصائية وتطبيقاتها، ، بدون ناشر.

٨. الفقى، السباعى محمد السباعى (١٩٩٣)، استخدام نموذج حاصل الضرب ذات المتغيرات المتعددة في تقدير عدد المطالبات لتأمين السيارات، المجلة المصرية للدراسات التجارية، جامعة المنصورة، كلية التجارة، مج١٧، ع٣، ص ص ٣٤٣-٣٥٧.

٩. مهدى، ابراهيم على محمد، المعداوى، محمد مسعد، الحسيني، الامام عبد العزيز،(٢٠١٠) نماذج بديلة لتسعير تأمين السيارات التكميلي دراسة تطبيقية، المجلة المصرية للدراسات التجارية، جامعة المنصورة، كلية التجارة، مج٣٤، ع٢، ص ص ٥٧٣-٥٩٤.

١٠. عجوة، أمانى محمد& عبد الحميد، نها عبد اللطيف، (٢٠١٧) النمذجة الاكتوارية لمطالبات التأمين الهندسى باستخدام بعض التوزيعات الاحتمالية ذات الذيل الثقيل ، المجلة المصرية للدراسات التجارية، جامعة المنصورة، كلية التجارة، مج٤١، ع١، الجزء الثانى، ص ص ٧٧-١٠٣.

١١. عجوة، أمانى محمد، (٢٠١٩) استخدام توزيع بواسون ذى الأصفار الزائدة وتوزيع هاردل بواسون في نمذجة تكرار المطالبات في تأمين السيارات، المجلة المصرية للدراسات التجارية، جامعة المنصورة، كلية التجارة، مج٤٢، ع٤، ص ص ١٧٢- ٢٠٤.

١٢. عجوة، أمانى محمد، نموذج مقترح لتسعير وثائق تأمين السيارات التكميلي، مجلة الدراسات التجارية المعاصرة (JCCS)، العدد التاسع، ص ص ٥٤٢-٥٦١.

١٣. الكتاب الإحصائي السنوي الذي تصدره الهيئة العامة للرقابة المالية عن نشاط سوق التأمين المصرى من عام ٢٠٠٩ حتى عام ٢٠٢٠.

14. de Freitas Costa, E., Schneider, S., Carlotto, G. B., Cabalheiro, T., & de Oliveira Júnior, M. R. (2021). Zero-inflated-censored Weibull and gamma regression models to estimate wild boar population dispersal distance. *Japanese Journal of Statistics and Data Science*, 1-23.

15. Eling, M. (2012). Fitting insurance claims to skewed distributions: Are the skew-normal and skew-student good models?. *Insurance: Mathematics and Economics*, *51*(2), 239-248.
16. Hazra, A., Bhattacharya, S., & Banik, P. (2018). A Bayesian zero-inflated exponential distribution model for the analysis of weekly rainfall of the eastern plateau region of India. *Mausam*, *69*(1), 19-28.
17. Huang, D., Hu, H., & Li, Y. (2019). Zero-Inflated Exponential Distribution of Casualty Rate in Ship Collision. *Journal of Shanghai Jiaotong University (Science)*, *24*(6), 739-744.
18. Maydeu-Olivares, A., & Garcla-Forero, C. (2010). Goodness of fit testing. *International Encyclopedia of Education*, Vol. 7, 190-196.
19. Mazviona, B. W., & Chiduza, T. (2013). The use of statistical distributions to model claims in motor insurance. *Journal of Business, Economics and Law*, *3*, 44-57.
20. Nanjundan, G., & Pasha, S. (2018). Characterization of zero-inflated gamma distribution. *Journal of Computer and Mathematical Sciences*, *9*(12), 1861-5.
21. Omari, C. O., Nyambura, S. G., & Mwangi, J. M. W. (2018). Modeling the frequency and severity of auto insurance claims using statistical distributions.Journal of Mathematical Finance, 8(1), 137-160.
22. Pacáková, V., Gogola, J., & Zapletal, D. (2016). Collective risk model in heterogeneous portfolios of policies. *Scientific papers of the University of Pardubice. Series D, Faculty of Economics and Administration. 37/2016*.
23. Packová, V., & Brebera, D. (2015). Loss distributions in insurance risk management. *Recent Advances on Economics and Business Administration*, 17-22.
24. Pekasiewicz, D. (2014). Application of quantile methods to estimation of Cauchy distribution parameters. *Statistics in Transition. New Series*, *15*(1), 133-144.
25. Rivas, L., & Campos, F. (2021). Zero inflated Waring distribution. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 1-16.
26. Smyth, G. K., & Jørgensen, B. (2002). Fitting Tweedie's compound Poisson model to insurance claims data: dispersion modelling. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, *32*(1), 143-157.
27. Xacur, O. A. Q., & Garrido, J. (2015). Generalised linear models for aggregate claims: to Tweedie or not? *European Actuarial Journal*, *5*(1), 181-202.
28. Zuanetti, D., Diniz, C., & Leite, J. (2006). A lognormal model for insurance claims data. *REVSTAT-Statistical Journal*, *4*(2), 131-142., 131-142.

Some of Zero-inflated distributions in calculating pure rate in private motor insurance

Dr. Amany Mohamed Agwa

Abstract

Choosing the probability distribution that is consistent with the data of total claims is a great matter in general insurance, especially in motor insurance, to determine the pure rate, calculate provisions, and determine reinsurance agreements. This research aims to present a methodology for calculating the pure rate in private motor insurance using some zero-inflated distributions in order to solve the problem of the lack of data on the number of claims especially when the zero claims ratio is large. Three zero-inflated distributions were used: zero-inflated Exponential distribution, zero-inflated Weibull distribution, and zero-inflated Pareto distribution. The mean and variance formulas were derived for the distributions under study, and the unknown parameters were estimated using the percentile method. The estimation of the proportion of zero claims in the three distributions was equal. The results of the Kolmogorov-Smirnov test confirmed the validity of the three distributions to represent the claims data under study. According to the AIC, BIC criterion, zero-inflated Pareto is the best distribution in representing the claims data under study. The pure rate was calculated using the mean and variance of the zero-inflated Pareto and the total sum of insurance in the private motor insurance portfolio, taking into account the inflation rate and the interest rate. The study found that zero-inflated Pareto distribution in better than zero-inflated Weibull which is better than zero-inflated Exponential distribution.

Keywords: Zero-inflated distributions, Pure rate, Percentile method, Motor insurance.