تحليل أثر طريقة التقدير على مقدار تحيز التجميع لبيانات مجمعة بها متغير عشوائي مفسر

إعداد

د. سمر أحمد حلمي عبد الغني

قسم الإحصاء والرياضيات والتأمين

كلية التجارة - جامعة بورسعيد

blue_arkedia@hotmail.com

المجلة العلمية للدراسات والبحوث المالية والتجارية

كلية التجارة – جامعة دمياط

المجلد الثاني ـ العدد الثاني – الجزء الثالث ـ يوليو ٢٠٢١

التوثيق المقترح وفقا لنظام APA:

عبد الغني، سمر أحمد حلمي (٢٠٢١). تحليل أثر طريقة التقدير على مقدار تحيز التجميع لبيانات مجمعة بها متغير عشوائي مفسر. المجلة العلمية للدراسات والبحوث المالية والتجارية، كلية التجارة، جامعة دمياط، ٢(٢) ج٣، ١١٦٩ـ١٢١٠.

رابط المجلة: https://cfdj.journals.ekb.eg/

تحليل أثر طريقة التقدير على مقدار تحيز التجميع لبيانات مجمعة بها متغير عشوائي مفسر

د. سحر أحمد حلمي عبد الغني

المستخلص

من المعروف أن تجميع البيانات يؤدي إلى وجود تحيز في تقدير معلمات النموذج المجمع. يهدف هذا البحث إلى دراسة أثر طريقة التقدير على مقدار التحيز إذا كان أحد المتغيرات المفسرة متغيرا عشوائيا. وتمت مقارنة التقدير بالمتغير المساعد مقارنة بالتقدير بتحليل البواقي وقد تم بحث نموذج ن متغير تابع ومتغيرين مفسرين أحدهما عشوائي. وقد وجد أن التحيز في تقدير معامل انحدار المتغير العشوائي المفسر انعكس على تقدير تحيز التجميع في هذه المعلمة وامتد أثره على تقدير تحيز التجميع في الحد الثابت مما يعطي أفضلية لطريقة المتغيرات المساعدة فهي أكثر ثباتا عن طريقة تخليل البواقي.

١- مقدمة

١/١ تعريف تحيز التجميع Aggregation Bias:

يعرف تحيز التجميع Theil (1954) و Sbrana (2011) بأنه انحراف قيمة معلمات النموذج الكلي (المجمع) عن متوسط المعلمات المناظرة في النماذج الفردية.

الحالات التي يختفي فيها تحيز التجميع: إذا كانت معلمات النماذج الفردية لها نفس القيمة وهو فرض نظري يصعب تحققه.

مثال: إذا كانت معلمات النماذج الفردية لها نفس القيمة فإن المعادلات الفردية تكون:

$$Y_{il} = \alpha_{il} + \beta_{1l} X_{1il} + \dots + \beta_{KL} X_{KnL} + u_{il}\,,\quad i = 1, \dots, n\,,\ l = 1,\ L$$

ولتسهيل الاشتقاقات نستخدم الانحرافات عن الأوساط الحسابية فتصبح المعادلات الفردية

$$y_{il} = \beta_{1l}\, x_{1il} + \dots + \beta_{KL} x_{KnL} + u_{il}\,,\quad i = 1, \dots, n\,,\ l = 1, \dots, L$$

حيث n عدد المشاهدات و L عدد المعادلات فإن المعادلة المجمعة تكون

$$d_i = B\, h_{ik} \qquad i = 1,, \dots, n\,,\quad k = 1, \dots, K \qquad (١/١)$$

حيث $h_i = \sum_{l=1}^{L} x_{ikl}$ وكذلك $d_i = \sum_{l=1}^{L} y_{il}$

معاملات الانحدار في المعادلات الفردية: $\beta_l = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_{i1}\, y_{i1}}{\sum_{i=1}^{n} x_{i1}^2}\,,\ l=1,\dots L$

ولما كانت β متساوية في جميع المعادلات (فرضا) فإن

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{i1}\ y_{i1}}{\sum_{i=1}^{n} x_{i1}^{2}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{i2}\ y_{i2}}{\sum_{i=1}^{n} x_{i2}^{2}} = ... = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{iL}\ y_{iL}}{\sum_{i=1}^{n} x_{iL}^{2}} \qquad ,l=1,...,L$$

إذن [1]

(٢/١)

$$\beta = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{i1}\ y_{i1} + \sum_{i=1}^{n} x_{i2}\ y_{i2} + ... + \sum_{i=1}^{n} x_{iL}\ y_{iL}}{\sum_{i=1}^{n} x_{i1}^{2} + \sum_{i=1}^{n} x_{i2}^{2} + ... + \sum_{i=1}^{n} x_{iL}^{2}}$$

بينما معامل انحدار المعادلة المجمعة من المعادلة (٣/١)

بالتعويض عن h و d في تقدير المعادلة المجمعة،

$$B = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{L} x_l \sum_{l=1}^{L} y_l\right)_i}{\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{L} x_l\right)_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{i1}\ y_{i1} + ... + \sum_{i=1}^{n} x_{iL}\ y_{iL} + \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{l\neq m}^{L} x_l\ y_m\right)_i}{\sum_{i=1}^{n} x_{i1}^{2} + ... + \sum_{i=1}^{n} x_{iL}^{2} + \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{l\neq m}^{L} x_l\ x_m\right)_i} \quad (٣/١)$$

ولما كانت المعادلات الفردية مستقلة إحصائيا عن بعضها البعض فإن متغيرات أي معادلة تكون مستقلة عن متغيرات أي معادلة أخرى لذلك فإن $x_l\, y_m$ في البسط = صفر وكذلك $x_l\, x_m$ في المقام = صفر حيث $l \neq m$ وبالتالي فإن المعادلة (٣/١) تصبح[٢]

$$B = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{i1}\ y_{i1} + \sum_{i=1}^{n} x_{i2}\ y_{i2} + ... + \sum_{i=1}^{n} x_{iL}\ y_{iL}}{\sum_{i=1}^{n} x_{i1}^{2} + \sum_{i=1}^{n} x_{i2}^{2} + ... + \sum_{i=1}^{n} x_{iL}^{2}} \qquad (٤/١)$$

(١) رياضيا إذا وجدت عدة نسب متساوية فإن مجموع المقدمات ÷ مجموع التوالي = إحدى النسب

(٢) كما هو معروف فإن متوسط الكميات المتساوية = إحدى القيم

يلاحظ أن المعادلة (٤/١) تطابق المعادلة (٢/١) أي أن معامل الانحدار المجمع يساوي معامل الانحدار الفردي (أو متوسطه) ويكون تحيز التجميع $B - \overline{\beta}$ = B - β = صفر

أما الجزء المقطوع intercept فيتم تقديره بالمعادلات الفردية كما يلي

المعادلات الفردية $\alpha_l = \overline{Y}_l - \beta\ \overline{X}_l \quad , l=1,...,L$

ومجموع الجزء المقطوع بجمع المعادلات $l=1,...,L$ هو

$$\sum_{l=1}^{L}\alpha_l = \sum_{l=1}^{L}\overline{Y}_l - \beta \sum_{l=1}^{L}\overline{X}_l \qquad (٥/١)$$

أما الجزء المقطوع في المعادلة المجمعة A فيمكن الحصول عليه من المعادلة (١/٣) كالآتي:

$$\mathrm{A} = \overline{D} - \mathrm{B}\overline{H} \qquad (٦/١)$$

ولما كانت $\mathrm{B} = \beta$ وكذلك $D_i = \sum_{l=1}^{L} Y_{il}$ و $H_i = \sum_{l=1}^{L} X_{il}$ وكما نعلم أن متوسط المجموع = مجموع المتوسطات، بالتعويض في (٦/١) نجد أن

$$\mathrm{A} = \frac{\sum_{l=1}^{L}\sum_{i=1}^{n} Y_{il}}{n} - \beta \frac{\sum_{l=1}^{L}\sum_{i=1}^{n} X_{il}}{n} = \sum_{l=1}^{L}\overline{Y} - \beta\sum_{l=1}^{L}\overline{X} \qquad (٧/١)$$

يلاحظ أن المعادلتين (٥/١) و (٧/١) متطابقتين، وهذا يثبت أن تحيز التجميع يختفي إذا تساوت معاملات الانحدار في المعادلات الفردية

يجب ملاحظة أن تحيز التجميع في الحد الثابت يجب أن يقاس بالفرق بين الحد الثابت في المعادلة المجمعة ومجموع الحدود الثابتة في المعادلات الفردية لأنه من المعادلتين (٥/١) و (٧/١) تم إثبات أن $A = \Sigma\, \alpha_l$ وهو الوضع المقبول منطقيا بعكس مايقول به تنبرجن

٢/١ أنواع التجميع

أهم أنواع التجميع هي:

أ - التجميع الطولي أو المكاني Longitudinal or Spatial aggregation

وهو عبارة عن تجميع بيانات المناطق الجغرافية مثل تجميع بيانات المحافظات أو تجميع بيانات مؤسسات مثل (قطاع الأعمال أو القطاع الخاص أو قطاع الإنتاج).

ب – التجميع الزمني Temporal Aggregation

أي تجميع بيانات سلاسل زمنية مثلاً ربع سنوية أو شهرية لكي تمثل بيانات سنوية

جـ – التجميع المتزامن Contemporaneous Aggregation

التجميع المتزامن أو المعاصر (أي تجميع قطاع مستعرض Cross Sectional Aggregation) هو تجميع بيانات عدة متغيرات في زمن واحد مثل تجميع البيانات اللازمة لإنشاء رقم قياسي للأسعار، أو تجميع عدد من التنبؤات. وهذه الأرقام مترابطة حيث أنه غالباً ما يحدث أكثر من نوع من أنواع التجميع في وقت واحد.

٣/١ طرق التجميع:

يقصد بطريقة التجميع كيفية تجميع بيانات جزئية لبناء معادلة مجمعة أو كلية وتتوقف طريقة التجميع على طبيعة البيانات وشكل المعادلة وفيما يلي

أ - تجميع خطي Linear Additive Aggregation (LAA)

إذا كانت المعادلات الفردية على الشكل:

$$Y_{il} = \alpha_{il} + \beta_{1l} X_{1il} + \ldots + \beta_{KL} X_{KnL} + u_{il} \ , \ \ i = 1, \ \ldots, n \ , \ l = 1, \ \ ,L$$

حيث L عدد المعادلات، K عدد معاملات انحدار المتغيرات المفسرة، n عدد المفردات في هذه الحالة يتم التجميع خطيا وتكون المعادلة المجمعة على الشكل

$$\sum_{l=1}^{L} Y_{il} = \mathrm{A} + \mathrm{B} \sum_{l=1}^{L} X_{kil} + \sum_{l=1}^{L} U_{il} \quad i = 1 \ldots . n, k = 1, \ldots, K$$

ب - تجميع غير خطي (NLA) Non Linear Aggregation.

على سبيل المثال إذا كانت المعادلات الفردية على الشكل:

$$Y_{il} = \alpha_{il} \ X_{1il}^{\beta_{1l}} \ X_{2il}^{\beta_{2l}} \ldots . X_{KnL}^{\beta_{KL}} \ U_{il} \quad , i = 1, \ldots n \ , \ l = 1, \ldots L$$

في هذه الحالة لا يمكن التجميع مباشرة لذلك يؤخذ لوغاريتمات طرفي المعادلات الفردية فتصبح على الشكل

$$\ln Y_{il} = \ln \alpha_{il} + \beta_{1l} \ln X_{1il} + \beta_{2l} \ln X_{2il} + \ldots + \beta_{KL} \ln X_{KnL} + \ln U_{il} \ , i = 1, \ldots, n, l = 1 \ldots L$$

ويمكن تجميعها خطيا وتصبح المعادلة الكلية على الشكل

$$\sum_{l=1}^{L} \ln Y_{il} = \mathrm{A} + \mathrm{B} \sum_{l=1}^{L} \ln X_{kil} + \sum_{l=1}^{L} \ln U_{il} \quad i = 1 \ldots . n, k = 1, \ldots, K$$

وسوف يكون التجميع متزامنا (أي تجميع قطاع مستعرض Cross Sectional Aggregation) وطريقة التجميع خطية في هذا البحث أما أسلوبي التقدير الذين ستتم مقارنتهما هما

١ - الانحدار بتحليل البواقي Residual Analysis

٢ - الانحدار بالمتغيرات المساعدة Instrumental Variables

٢ - خطوات الحصول على قيمة التحيز وحسابه نظريا:

١- تقدير معلمات النماذج الفردية بأسلوب التقدير المناسب

٢- تقدير معلمات النموذج المجمع بنفس الأسلوب الذي تم به تقدير المعلمات الفردية

٣- الحصول على تحيز التجميع من المعادلات السابقة بالأسلوب المعروف (أي الفرق بين قيمة المعلمات الكلية ومتوسط المعلمات الفردية عدا الحد الثابت فالمقارنة تكون بين الحد الثابت في المعادلة المجمعة ومجموع الحدود الثابتة في المعادلات الفردية)

ويمكن التقليل من أخطاء التجميع بتعديل صياغة النموذج ذاته.

في الحالة موضوع البحث يكون النموذج في حالة الانحدار بتحليل البواقي هو

$$Y_i = \alpha + \beta \ X_i + \delta \ Z_i + U_i \quad i = 1, \ \ldots . , \ n \qquad (١/٢)$$

ويطبق هذا النموذج على المعادلات الفردية والمعادلة المجمعة

أما في حالة المتغيرات المساعدة تضاف المعادلة التالية التي تفسر المتغير العشوائي Z في المعادلة (١/٢)

$$Z_i = \gamma + \theta W_i + V_i \quad i = 1, \dots, n \qquad (٢/٢)$$

وتطبق على المعادلات الفردية والمعادلة المجمعة

١/٢ حساب تحيز التجميع بتحليل البواقي بوجود متغير عشوائي مفسر

لتسهيل الاشتقاقات الرياضية البدء بالحالة التالية:

١ - عدد المتغيرات المفسرة ٢ أحدها عشوائي

٢ - عدد المعادلات ٢

٣ - النموذج في الصيغة المختصرة أي أن المتغيرات هي انحرافات عن الأوساط الحسابية، وتقدير الحد الثابت كما هو معروف

إذن يكون النموذج كما يلي

$$y_{il} = \beta\, x_{il} + \delta\, z_{il} + u_{il}, \quad i = 1, \dots, n,\ l = 1,2 \qquad (٣/٢)$$

حيث z متغير عشوائي، أي يمكن وضعه في صورة جزء غير عشوائي وليكن w وجزء آخر عشوائي هو عنصر الخطأ v لذلك يمكن وضعه في الصورة

$$z = w_i + v_i \qquad (٤/٢)$$

بالتعويض في المعادلة (٣/٢)

$$y_i = \beta\, x_i + \delta\,(w_i + v_i) + u_i, \quad i = 1, \dots, n \qquad (٥/٢)$$

$$= \beta\, x_i + \delta\, w_i + \delta\, v_i + u_i, \quad i = 1, \dots, n$$

$$= \beta\, x_i + \delta\, w_i + (\delta\, v_i + u_i), \quad i = 1, \dots, n \qquad (٦/٢)$$

لدراسة تحيز التجميع في هذه الحالة يوجد أحد أمرين الأول أن يكون عنصر الخطأ في المتغير العشوائي المفسر مستقلا عن عنصر الخطأ في المعادلة الفردية، الأمر الثاني أن يكون عنصر الخطأ في المتغير العشوائي المفسر غير مستقل عن عنصر الخطأ في المعادلة الفردية، هذا بفرض أن المتغير العشوائي المفسر مستقل عن المتغيرات المفسرة غير العشوائية في الحالتين

١/٢ الحالة الأولى:

المتغير العشوائي المفسر مستقل عن عنصر الخطأ في المعادلة الفردية

بالرجوع إلى المعادلة (٦/٢) نجد أن عنصري الخطأ هما u , v، والفروض التالية الموضوعة على عنصر الخطأ u يمكن قبولها بالنسبة لعنصر الخطأ v أيضا وهي

١ - متوسط الخطأ = صفر $E(v_i) = 0 \quad \text{for all } i$

٢ - ثبات التباين $E(v_i^2) = sv^2 \quad \text{for all } i$

٣ - استقلال عناصر الخطأ تسلسليا $Cov(v_i, v_j) = E(v_i\, v_j) = 0 \;\; \text{for } i \neq j$

٤ - استقلال عنصر الخطأ عن المتغير غير العشوائي في نفس المعادلة أو المعادلات الأخرى $E(X_i\, v_j) = X\,E(v) = 0 \quad \text{for all } i \,\&\, j$

٥ – عنصري الخطأ مستقلين عن بعضهما $Cov(u_i, v_j) = E(u_i\, v_i) = 0$

يصبح عنصر الخطأ في المعادلة الآن $(u + \beta_1 v)$ وبأخذ القيمة المتوقعة لهذا العنصر نجد:

$$E(u + \beta_1 v) = E(u) + E(\beta_1 v) = 0 + \beta_1 E(v) = 0+0 = 0$$

التغاير بين عنصري الخطأ

$$E(uv) = E(u) \times E(\beta_1 v) = 0 \times 0 = 0$$

أما تباين عنصر الخطأ الجديد فهو

$$E(u + \beta_1 v)^2 = E(u^2 + \beta_1^2 v^2 + 2\beta_1 uv) = E(u^2) + \beta_1^2 E(v^2) + 2\beta_1 E(uv)$$
$$= \sigma^2 + \beta_1^2 s^2 + 0 = \sigma^2 + \beta_1^2 s^2$$

إذن وجود **متغير مفسر عشوائي مستقل عن عنصر الخطأ** في المعادلة الفردية سوف يؤدي إلى زيادة التباين ولكن باقي متطلبات تطبيق المربعات الصغرى العادية متوفرة، ولكن ما تأثير ذلك على تحيز التجميع؟

بالنسبة لتحيز التجميع تظل هذه النتائج صحيحة وهذا ينطبق على أي نموذج قياسي أي إنه إذا كان أحد المتغيرات المفسرة عشوائيا ولكنه مستقل عن عنصر الخطأ في المعادلة فإن هذا المتغير العشوائي يعتبر كأنه **غير عشوائي** وبالتالي فإن طريقة المربعات الصغرى العادية تطبق بدون أي مشاكل Helmy (1974)

٢/٢ الحالة الثانية:

المتغير العشوائي المفسر غير مستقل عن عنصر الخطأ في المعادلة الفردية

من الفقرة السابقة

$$y_{il} = \beta\, x_{il} + \delta\, z_{il} + u_{il}, \quad i = 1, \ldots, n,\; l = 1,2 \qquad (٧/٢)$$

بالإضافة إلى الفروض الأربع السابقة يضاف الفرض التالي في هذه الحالة

٦ – المتغيرين المفسرين x وz مستقلين إحصائيا $Cov(x, z) = 0$

وفي هذه الحالة لا يمكن تطبيق المربعات الصغرى العادية لأن $E(zu) \neq 0$،

في هذه الحالة تطبق الطريقتين المقترحتين للمقارنة بين نتائجهما، ونبدأ بطريقة تحليل البواقي Residual Analysis وذلك بعمل انحدار للمتغير التابع y على x (غير العشوائي)

وحساب البواقي Residuals وانحدارها على z (العشوائي) وتنفيذ ذلك على المعادلات الفردية والمعادلة المجمعة، ومقارنة أثر التجميع على التحيز في تقدير معاملات الانحدار.

أولا: تقدير معاملات الانحدار في المعادلة الفردية:

بالرجوع إلى المعادلة (3/٢) التي تمثل نموذج المعادلات الفردية في شكل انحرافات عن الأوساط الحسابية لتسهيل الاشتقاقات الرياضية فيكون تقدير β بالمعادلة التالية:

$$\hat{\beta}_l = \frac{\sum x_{il} y_{il}}{\sum x_{il}^{\;2}} \qquad i=1,\ldots n\ ,\ l=1,\ldots L \qquad (٨/٢)$$

وتكون y^* هي البواقي حيث

$$y_{il}^* = y_{il} - \hat{\beta}_l\, x_{il} \ = \delta_l\, z_{il} \qquad i=1,\ldots n\ ,\ l=1,\ldots L \qquad (٩/٢)$$

ويكون تقدير معامل الانحدار δ_l كالآتي

$$\hat{\delta}_l = \frac{\sum z_{il} y_{il}^*}{\sum z_{il}^2} = \frac{\sum z_{il}\left(y_{il} - \hat{\beta}_l\, x_{il}\right)}{\sum z_{il}^2} = \frac{\sum z_{il} y_{il}}{\sum z_{il}^2} - \frac{\hat{\beta}_l \sum z_{il} x_{il}}{\sum z_{il}^2} \qquad i=1,\ldots n\ ,\ l=1,\ldots L \quad (١٠/٢)$$

ولدراسة تحيز هذه التقديرات، يحسب توقع كل من $\hat{\beta}_l$ و $\hat{\delta}_l$ في المعادلات الفردية:

$$E(\hat{\beta}_l) = E\left(\frac{\sum x_{il} y_{il}}{\sum x_{il}^2}\right) = \frac{E\sum x_{il}\left(\beta_l\, x_{il} + \delta_l\, z_{il} + u_{il}\right)}{\sum x_{il}^2} = \beta_l + \delta_l \frac{E\left(\sum x_{il} z_{il}\right)}{\sum x_{il}^2} + \frac{E\left(\sum x_{il} u_{il}\right)}{\sum x_{il}^2} \qquad (١١/٢)$$

والقيمة المتوقعة للحد الثالث في المعادلة (١١/٢) = صفر فرضا

أما الحد الثاني في هذه المعادلة، وحيث أن النموذج في الصيغة المختصرة أي أن المتغيرات هي انحرافات عن الأوساط الحسابية فإن $\sum x_{il} z_{il}$ هي التغاير بين x_{il} و z_{il} ، ولما كانتا مستقلتين فرضا فإن هذا التغاير = صفر، إذن

$$E(\hat{\beta}_l) = \beta_l \qquad (١٢/٢)$$

أي أن $\hat{\beta}_l = \frac{\sum x_{il} y_{il}}{\sum x_{il}^2}$ هو تقدير غير متحيز لمعامل الانحدار β للمتغير غير العشوائي

ولدراسة تقدير $\hat{\delta}_l$ الموضح في المعادلة (١٠/٢) تحسب القيمة المتوقعة لهذه المعادلة

$$E(\hat{\delta}_l) = E\left(\frac{\sum z_{il} y_{il}}{\sum z_{il}^2} - \frac{\hat{\beta}_l \sum z_{il} x_{il}}{\sum z_{il}^2}\right) = E\left(\frac{\sum z_{il} y_{il}}{\sum z_{il}^2}\right) - E\left(\frac{\hat{\beta}_l \sum z_{il} x_{il}}{\sum z_{il}^2}\right) \qquad (١٣/٢)$$

وبسط الحد الثاني من المعادلة (١٣/٢) هو $\sum x_{il} z_{il}$ وهو التغاير بين x_{il} و z_{il}، ولما كانتا مستقلتين فرضا فإن هذا التغاير = صفر، ويكون توقع المقدار $\frac{\hat{\beta}_l \sum z_{il} x_{il}}{\sum z_{il}^2}$ مساويا صفر فتصبح المعادلة (١٣/٢) بالشكل $E(\hat{\delta}_l) = \frac{\sum z_{il} y_{il}}{\sum z_{il}^2}$ وبالتعويض عن قيمة y في هذه النتيجة

$$E(\hat{\delta}_l) = E\left(\frac{\sum z_{il}(\beta_l x_{il} + \delta_l z_{il} + u_{il})}{\sum z_{il}^2}\right) = E\left(\frac{\sum(\beta_l x_{il} z_{il} + \delta_l z_{il}^2 + z_{il} u_{il})}{\sum z_{il}^2}\right)$$

$$= E\left(\frac{\beta_l \sum x_{il} z_{il}}{\sum z_{il}^2}\right) + E\left(\frac{\delta_l \sum z_{il}^2}{\sum z_{il}^2}\right) + E\left(\frac{\sum z_{il} u_{il}}{\sum z_{il}^2}\right) \qquad (١٤/٢)$$

$$= 0 + \delta_l + E\left(\frac{\sum z_{il} u_{il}}{\sum z_{il}^2}\right) = \delta_l + \frac{\sigma_{zil,uil}}{\sigma_{zil}^2}$$

ولما كانت z_{il} غير مستقلة عن عنصر الخطأ فتوقع المقدار $\sum z_{il} u_{il} \neq$ صفر ومن ثم يكون هناك تحيز في تقدير معامل انحدار المتغير العشوائي المفسر

إذن وجود متغير عشوائي مفسر لا يسبب تحيز في تقدير معامل انحدار المتغير غير العشوائي ولكنه أدى إلى وجود تحيز في تقدير معامل انحدار المتغير العشوائي وهذا التحيز سوف يكون له تأثير على تقدير الحد الثابت α كما يلي

$$\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\,\bar{X} - \hat{\delta}\,\bar{Z} \qquad (١٥/٢)$$

ولما كان $\hat{\delta}$ تقدير متحيز للمعلمة δ فذلك يؤدي إلى وجود تحيز في تقدير الحد الثابت في المعادلة الفردية

ولدراسة تأثير وجود متغير مفسر عشوائي على تحيز التجميع يتم تقدير معاملات المعادلة المجمعة بفرض وجود متغير مفسر عشوائي ومقارنة التحيز في هذه الحالة بالتحيز في حالة المغيرات المفسرة غير العشوائية

ثانيا: تقدير معاملات الانحدار في المعادلة المجمعة:

ولتقدير معاملات الانحدار في المعادلة المجمعة يتم تجميع المعادلة (٣/٢) السابقة فتصبح المعادلة المجمعة على الصورة:

$$\sum_{l=1}^{L} y_{il} = \mathrm{B}\sum_{l=1}^{L} x_{il} + \Delta\sum_{l=1}^{L} z_{il} + \sum_{l=1}^{L} u_{il}, \quad i = 1,\dots,n,\ l = 1,\dots,L \qquad (١٦/٢)$$

وتظل هذه المعادلة في شكل انحرافات عن الأوساط الحسابية للمتغيرات المجمعة لأن التجميع ليس له تأثير على الانحرافات عن الوسط الحسابي، ولتسهيل الاشتقاقات الرياضية نضع المعادلة السابقة في الشكل التالي بفرض أن $d_i = \sum_{l=1}^{L} y_{il}$, $g_i = \sum_{l=1}^{L} z_{il}$ and $h_i = \sum_{l=1}^{L} x_{il}$

إذن

$$d_i = \mathrm{B} h_i + \Delta g_i + u_i\,, \quad i = 1,\ldots,n \qquad (١٧/٢)$$

والفروض الموضوعة على المعادلات الفردية تنطبق على المعادلة المجمعة مع ملاحظة أن

٧ – المتغيرين المفسرين g و h مستقلين إحصائيا $Cov(g, h) = 0$

وهذا منطقي لأن g و h مجموع متغيرات مستقلة

في ظل هذه الفروض يمكن تقدير معاملات انحدار المعادلة المجمعة بنفس الخطوات التي اتبعت في تقدير معاملات المعادلات الفردية ويكون تقدير B كالآتي:

$$\hat{B} = \frac{\sum dh}{\sum h^2} \qquad (١٨/٢)$$

وتكون d^* هي البواقي حيث

$$d^* = d - \hat{B}\,h = \Delta\, g \qquad (١٩/٢)$$

ويكون تقدير معامل الانحدار Δ كالآتي

$$\begin{aligned} \hat{\Delta} &= \frac{\sum gd^*}{\sum g^2} = \frac{\sum g\left(d - \hat{B}\,h\right)}{\sum g^2} = \frac{\sum gd}{\sum g^2} - \frac{\hat{B}\sum gh}{\sum g^2} \\ &= \frac{\sum g\,(B\,h + \Delta\,g + u)}{\sum g^2} - \frac{\hat{B}\sum gh}{\sum g^2} \\ &= \frac{B\sum gh}{\sum g^2} + \Delta + \frac{\sum gu}{\sum g^2} - \frac{\hat{B}\sum gh}{\sum g^2} \end{aligned} \qquad (٢٠/٢)$$

ولدراسة تحيز هذه التقديرات، يحسب توقع كل من $\hat{B}$ و $\hat{\Delta}$ فمن المعادلة (١٧/٢) نجد أن:

$$E(\hat{B}) = E\left(\frac{\sum hd}{\sum h^2}\right) = \frac{E\sum h(\Delta g + Bh + u)}{\sum h^2} = \Delta\frac{E\left(\sum hg\right)}{\sum h^2} + B + \frac{E\left(\sum hu\right)}{\sum h^2} \qquad (٢١/٢)$$

والقيمة المتوقعة للحد الثالث في المعادلة أعلاه = صفر فرضا

أما الحد الأول في المعادلة أعلاه، وحيث أن النموذج في الصيغة المختصرة أي أن المتغيرات هي انحرافات عن الأوساط الحسابية فإن $\sum hg$ هي التغاير بين h وg، ولما كانتا مستقلتين فرضا فإن هذا التغاير = صفر (الفرض السادس أعلاه)، إذن

$$E(\hat{B}) = B \qquad (٢٢/٢)$$

أي أن $\hat{B} = \dfrac{\sum hd}{\sum h^2}$ هو تقدير غير متحيز لمعامل الانحدار B للمتغير غير العشوائي

ولدراسة تقدير Δ الموضح في المعادلة (٢٠/٢) نحسب القيمة المتوقعة لهذه المعادلة

$$E(\hat{\Delta}) = E\left(\frac{B\sum gh}{\sum g^2}\right) + \Delta + E\left(\frac{\sum gu}{\sum g^2}\right) - E\left(\frac{\hat{B}\sum gh}{\sum g^2}\right) \qquad (٢٣/٢)$$

ولما كان $\sum gh$ هو التغاير بين h وg، ولما كانتا مستقلتين فرضا فإن هذا التغاير = صفر

إذن المقدار $\dfrac{\hat{B}\sum gh}{\sum g^2}$ = صفر فتكون القيمة المتوقعة لمعامل انحدار المتغير العشوائي هي

$$E(\hat{\Delta}) = \Delta + 0 + E\left(\frac{\sum gu}{\sum g^2}\right) = \Delta + \frac{\sigma_{g,u}}{\sigma_g^2} \qquad (٢٤/٢)$$

ولما كانت g غير مستقلة عن عنصر الخطأ فتوقع المقدار $\sum gu$ ≠ صفر ومن ثم يكون هناك تحيز في تقدير معامل انحدار المتغير العشوائي المفسر

إذن وجود متغير عشوائي مفسر أدى إلى نفس النتائج التي حدثت في المعادلات الفردية أي أن وجود متغير عشوائي مفسر لا يسبب تحيز في تقدير معامل انحدار المتغير غير العشوائي ولكنه أدى إلى وجود تحيز في تقدير معامل انحدار المتغير العشوائي وهذا التحيز سوف يكون له تأثير على تقدير الحد الثابت A كما يلي:

$$\hat{A} = \overline{D} - \hat{B}\,\overline{H} - \hat{\Delta}\,\overline{G} \qquad (٢٥/٢)$$

وكما سبق، فإن $\hat{\Delta}$ تقدير **متحيز** للمعلمة Δ مما يؤدي إلى وجود **تحيز** في تقدير الحد الثابت

النتيجة النهائية هي أن وجود متغير عشوائي مفسر مع التقدير **بتحليل البواقي** أدى إلى وجود تحيز في تقدير معامل انحدار المتغير العشوائي والذي نتج عنه وجود تحيز في تقدير الحد الثابت سواء في المعادلات الفردية أو المعادلة المجمعة أما تقدير معامل انحدار المتغير غير العشوائي فلم يوجد به تحيز سواء في المعادلات الفردية أو المعادلة المجمعة

مع التسليم بوجود تحيز ناتج عن التجميع في جميع الأحوال، فالسؤال الآن ما هو تأثير وجود متغير مفسر عشوائي على تحيز التجميع؟ هل يزداد تحيز التجميع أم يقل؟ هل التأثير

يقتصر على معامل انحدار المتغير العشوائي؟ أم يتأثر معامل انحدار المتغير غير العشوائي؟ وماهو التأثير على الحد الثابت؟

للإجابة على هذه الأسئلة نحسب تحيز التجميع في هذه الحالة ونقارنه بتحيز التجميع في حالة التقدير بالمتغيرات المساعدة

ثالثا: قياس تحيز التجميع في معامل انحدار المتغير المفسر غير العشوائي

من المعادلة (١٨/٢) كان تقدير معامل انحدار المتغير غير العشوائي في المعادلة المجمعة هو $\hat{B}=\frac{\sum dh}{\sum h^2}$ وكما سبق فإن $d_i=\sum_{l=1}^{L} y_{il}\ ,\ g_i=\sum_{l=1}^{L} z_{il}\ ,\ h_i=\sum_{l=1}^{L} x_{il}$ وكما تقدم فإن عدد المعادلات الفردية هو ٢ فيمكن قياس تحيز التجميع بالفرق بين هذا التقدير ومتوسط تقديرات معامل انحدار المتغير غير العشوائي في المعادلات الفردية الذي سبق اشتقاق تقديره في المعادلة (٨/٢) وكان $\hat{\beta}=\frac{\sum xy}{\sum x^2}$ ويكون متوسط هذا التقدير في المعادلتين الفرديتين كما يلي

$$\frac{1}{2}\left(\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2\right) \qquad (٢٦/٢)$$

إذن تحيز التجميع يكون

$$\hat{\mathrm{B}}-\frac{1}{2}\left(\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2\right) \qquad (٢٧/٢)$$

ولما كانت تقديرات هذه المعاملات غير متحيزة، فإن توقعها يكون

$$E\left(\hat{\mathrm{B}}-\frac{1}{2}\left(\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2\right)\right)=\mathrm{B}-\frac{1}{2}\left(\beta_1+\beta_2\right) \qquad (٢٨/٢)$$

وتحيز التجميع هذا مطابق تماما للحالة التي يكون فيها متغير مفسر واحد غير عشوائي وهو أمر منطقي لأنه بتطبيق الانحدار والبدء بالمتغير غير العشوائي فإن المتغير العشوائي يكون ضمن عنصر الخطأ وطالما أن المتغيرين المفسرين مستقلين فإن المتغير المفسر غير العشوائي سيكون مستقلا عن عنصر الخطأ + المتغير العشوائي المفسر فتصبح المعادلة كأنها في متغير مفسر واحد غير عشوائي ويكون تحليل تحيز التجميع في الحد الثابت في هذه الحالة حيث سيوجد حدين ثابتين، الأول عند إجراء الانحدار على المتغير غير العشوائي وهو ما ينطبق عليه التحليل السابق أما الحد الثابت الثاني فيظهر عند إجراء الانحدار على البواقي، ويتم تحليله عندئذ

رابعا: قياس تحيز التجميع في معامل انحدار المتغير العشوائي المفسر

ولقياس تحيز التجميع في معامل انحدار المتغير العشوائي المفسر، وعدد المعادلات هو ٢ فمن المعادلة (٢٠/٢) كان تقدير معامل انحدار المتغير العشوائي المفسر في المعادلة المجمعة هو $\hat{\Delta}=\frac{\sum gd}{\sum g^2}$ وكان توقعه في المعادلة (٢٤/٢) كما يلي:

$$E(\hat{\Delta})=\Delta+\frac{\sigma_{g,u}}{\sigma_g^2} \qquad (٢٩/٢)$$

وقياس تحيز التجميع في معامل انحدار المتغير العشوائي المفسر بالفرق بين المعادلة (٢٩/٢) ومتوسط تقدير معاملات انحدار المتغير العشوائي المفسر في المعادلات الفردية الذي سبق تقديره في في المعادلة (١٠/٢)

$$\hat{\delta}=\frac{\sum zy}{\sum z^2} \qquad (٣٠/٢)$$

وكانت قيمته المتوقعة في المعادلة (١٤/٢) كما يلي

$$E(\hat{\delta}_l)=\quad \delta_l+\frac{\sigma_{zil,uil}}{\sigma_{zil}^2} \qquad (٣١/٢)$$

ويكون توقع تحيز التجميع

$$E\left(\hat{\Delta}-\frac{1}{2}\left(\hat{\delta}_1+\hat{\delta}_2\right)\right)=E(\hat{\Delta})-\frac{1}{2}\left(E(\hat{\delta}_1)+E(\hat{\delta}_2)\right) \qquad (٣٣/٢)$$

بالتعويض عن هذه التوقعات نصل إلى تحيز التجميع في معامل انحدار المتغير العشوائي المفسر كما يلي:

$$\Delta+\frac{\sigma_{g,u}}{\sigma_g^2}-\frac{1}{2}\left(\delta_1+\frac{\sigma_{z1,u1}}{\sigma_{z1}^2}+\delta_1+\frac{\sigma_{z2,u2}}{\sigma_{z2}^2}\right)=\Delta-\frac{1}{2}\left(\delta_1+\delta_1\right)+\left(\frac{\sigma_{g,u}}{\sigma_g^2}-\frac{1}{2}\left[\frac{\sigma_{z1,u1}}{\sigma_{z1}^2}+\frac{\sigma_{z2,u2}}{\sigma_{z2}^2}\right]\right) (٣٣/٢)$$

ولما $\frac{\sigma_{g,u}}{\sigma_g^2}=\frac{\sum(z_1+z_2)(u_1+u_2)}{\sum(z_1+z_2)^2}=\frac{\sum z_1u_1+\sum z_1u_2+\sum z_2u_1+\sum z_2u_2}{\sum z_1^2+\sum z_2^2+2\sum z_1z_2}$ المقدار

كانت المعادلات الفردية مستقلة فالتغايرات التبادلية = صفر إذن $\frac{\sigma_{g,u}}{\sigma_g^2}=\frac{\sum z_1u_1+\sum z_2u_2}{\sum z_1^2+\sum z_2^2}$

ويكون التحيز في تحيز التجميع في (٣٣/٢) هو $\frac{\sum z_1u_1+\sum z_2u_2}{\sum z_1^2+\sum z_2^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\sum z_1u_1}{\sum z_1^2}+\frac{\sum z_2u_2}{\sum z_2^2}\right)$

ويمكن تعميمه كما يلي $\frac{\sum_{l=1}^{L}\sum_{i=1}^{n} z_{il}u_{il}}{\sum_{l=1}^{L}\sum_{i=1}^{n} z_{il}^2} - \frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} z_{il}u_{il}}{\sum_{i=1}^{n} z_{il}^2}\right)_l$ وهو ناتج عن عدم استقلال المتغير العشوائي المفسر عن عنصر الخطأ سواء في المعادلات الفردية أو المجمعة

خامسا: قياس تحيز التجميع في الحد الثابت

بالرجوع إلى المعادلة (٩/٢) حيث كان شكل معادلة البواقي هو $Y_1^* = Y_1 - \hat{\alpha}_1 - \hat{\beta}_1 X_1 = \alpha_1^* + \delta_1 Z_1$ والمعادلة العامة $y_1^* = y_1 - \hat{\beta}_1 x_1 = \delta_1 z_1$ وتقدير الحد الثابت في المعادلة الفردية في المرحلة الثانية من الانحدار هو

$$\hat{\alpha}_1^* = \overline{Y}_1^* - \hat{\delta}_1 \overline{Z}_1 \qquad (٣٤/٢)$$

وبالتعويض عن قيمة $\overline{Y}_1^*$ حيث $Y_1^* = Y_1 - \hat{\alpha}_1 - \hat{\beta}_1 X_1$ نصل إلى

$$\hat{\alpha}_1^* = \left(\overline{Y}_1 - \overline{\hat{\alpha}}_1 - \hat{\beta}_1 \overline{X}_1\right) - \hat{\delta}_1 \overline{Z}_1 \qquad (٣٥/٢)$$

ولما كان $\hat{\alpha}_1$ مقدار ثابت، فمتوسطه = $\hat{\alpha}_1$ كذلك، فتصبح (٣٥/٢) كالآتي

$$\hat{\alpha}_1^* = \overline{Y}_1 - \hat{\alpha}_1 - \hat{\beta}_1 \overline{X}_1 - \hat{\delta}_1 \overline{Z}_1 \qquad (٣٦/٢)$$

وتوقع المعادلة (٣٦/٢) يكون:

$$\begin{aligned} E(\hat{\alpha}_1^*) &= \overline{Y}_1 - E(\hat{\alpha}_1) - E(\hat{\beta}_1)\overline{X}_1 - \overline{Z}_1 E(\hat{\delta}_1) \\ &= \overline{Y}_1 - \alpha_1 - \beta_1 \overline{X}_1 - \overline{Z}_1\left(\delta_l + \frac{\sigma_{zil,uil}}{\sigma_{zil}^2}\right) \\ &= \overline{Y}_1 - \alpha_1 - \beta_1 \overline{X}_1 - \delta_1 \overline{Z}_1 - \overline{Z}_1 \frac{\sigma_{z1,u1}}{\sigma_{z1}^2} \\ &= \alpha_1 - \overline{Z}_1 \frac{\sigma_{z1,u1}}{\sigma_{z1}^2} \end{aligned} \qquad (٣٧/٢)$$

ويلاحظ وجود تحيز في تقدير الحد الثابت في المرحلة الثانية من انحدار البواقي مقداره $-\overline{Z}_1 \frac{\sigma_{z1,u1}}{\sigma_{z1}^2}$ وذلك لوجود تحيز في تقدير معامل انحدار المتغير العشوائي المفسر δ_1 هذا في المعادلة الفردية الأولى، وينطبق نفس الاشتقاق على المعادلة الفردية الثانية أي

$$E(\hat{\alpha}_2^{\,*}) = \alpha_2 - \bar{Z}_2 \frac{\sigma_{z2,u2}}{\sigma_{z2}^2} \qquad (٣٨/٢)$$

والتحيز في تقدير الحد الثابت في المعادلة الثانية هو $- \bar{Z}_1 \frac{\sigma_{z2,u2}}{\sigma_{z2}^2}$

وتقدير الحد الثابت في المعادلة المجمعة بالقياس على تقدير الحد الثابت في المعادلات الفردية (٣٦/٢) و (٣٧/٢) مع الفرض أنهما معادلتين هو

$$\hat{A}^* = (\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2) - \hat{A} - \hat{B}(\bar{X}_1 + \bar{X}_2) - \hat{\Delta}(\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2) \qquad (٣٩/٢)$$

وتوقع هذا التقدير هو

$$E(\hat{A}^*) = (\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2) - E(\hat{A}) - E(\hat{B})(\bar{X}_1 + \bar{X}_2) - E(\hat{\Delta})(\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2) \qquad (٤٠/٢)$$

من المعادلة (٢٩/٢) كان توقع $\hat{\Delta}$ هو $E(\hat{\Delta}) = \Delta + \frac{\sigma_{g,u}}{\sigma_g^2}$ بالتعويض في المعادلة (٤٠/٢) نجد

$$\begin{aligned} E(\hat{A}^*) &= (\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2) - \mathrm{A} - \mathrm{B}(\bar{X}_1 + \bar{X}_2) - \left(\Delta + \frac{\sigma_{g,u}}{\sigma_g^2}\right)(\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2) \\ &= (\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2) - \mathrm{A} - \mathrm{B}(\bar{X}_1 + \bar{X}_2) - \Delta(\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2) - \frac{\sigma_{g,u}}{\sigma_g^2}(\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2) \\ &= A - \frac{\sigma_{g,u}}{\sigma_g^2}(\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2) \end{aligned} \qquad (٤١/٢)$$

ويوجد تحيز أيضا في تقدير الحد الثابت في المعادلة المجمعة مقداره $-\frac{\sigma_{g,u}}{\sigma_g^2}(\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2)$ ،

أما تحيز التجميع فيقاس بالفرق بين المعادلة (٤١/٢) ومجموع المعادلتين (٣٧/٢) و (٣٨/٢) كما يلي

$$\hat{A}^* - (\hat{\alpha}_1^* + \hat{\alpha}_2^*) = = A - \frac{\sigma_{g,u}}{\sigma_g^2}(\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2) - \left[\left(\alpha_1 - \bar{Z}_1 \frac{\sigma_{z1,u1}}{\sigma_{z1}^2}\right) + \left(\alpha_2 - \bar{Z}_1 \frac{\sigma_{z2,u2}}{\sigma_{z2}^2}\right)\right] \qquad (٤٢/٢)$$

وبعد تصفية المعادلة (٤٣/٢) وإعادة ترتيبها تصبح

$$\hat{A}^* - (\hat{\alpha}_1^* + \hat{\alpha}_2^*) = \left[A - (\alpha_1 + \alpha_2)\right] + \bar{Z}_1 \frac{\sigma_{z1,u1}}{\sigma_{z1}^2} + \bar{Z}_2 \frac{\sigma_{z2,u2}}{\sigma_{z2}^2} - \frac{\sigma_{g,u}}{\sigma_g^2}(\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2) \qquad (٤٣/٢)$$

ويلاحظ أن تحيز التجميع في الحد الثابت في المرحلة الثانية من الانحدار في المعادلة المجمعة يحتوي على تحيز تقدير ناتج عن تحيز التقدير في معاملات انحدار المتغير العشوائي المفسر سواء في المعادلات الفردية أو المجمعة

٢/٢ حساب تحيز التجميع بالمتغيرات المساعدة بوجود متغير عشوائي مفسر

يتكون النموذج في هذه الحالة من المتغيرين المفسرين X غير عشوائي والمتغير

Z متغير عشوائي والمتغير W غير عشوائي (متغير مساعد) يفسر المتغير العشوائي Z ويتم التجميع على معادلتين فرديتين حتى تستقيم المقارنة مع حالة التقدير بتحليل البواقي، فكل معادلة تحتاج إلى معادلتين هما

$$y_{1i} = \beta_1 x_{1i} + \delta_1 z_{1i} + u_{1i} \quad i = 1, \ldots, n \qquad (١/٣)$$

$$z_{1i} = \theta_1 w_{1i} + v_{1i} \quad i = 1, \ldots, n \qquad (٢/٣)$$

وهما كالمعتاد، في شكل انحرافات عن الأوساط الحسابية للمتغيرات لتسهيل الاشتقاقات الرياضية:

أولا: تقدير معاملات الانحدار في المعادلة الفردية:

المتغير المساعد في هذه الحالة هو W_1 وهو متغير غير عشوائي فرضا، بانحدار Z_1 على W_1 في المعادلة (٢/٣) فإن تقدير معامل الانحدار هو $\hat{\theta}_1 = \frac{\sum w_1 z_1}{\sum w_1^2}$ ويكون تقدير z_1 هو

$$\hat{z}_1 = \hat{\theta}_1 w_1$$

تستخدم هذه القيم في المعادلة (١/٣) فتصبح

$$y_{1i} = \beta_1 x_{1i} + \delta_1 \hat{z}_{1i} + u_{1i} \quad i = 1, \ldots, n \qquad (٣/٣)$$

ومقدر المربعات الصغرى العادية لهذه المعادلة هو

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \\ \hat{\delta}_1 \end{bmatrix}_{2\times1} = \frac{1}{\sum \hat{z}_1^2 \sum x_1^2 - \left(\sum \hat{z}_1 x_1\right)^2} \begin{bmatrix} \sum \hat{z}_1^2 \sum x_1 y_1 - \sum \hat{z}_1 x_1 \sum \hat{z}_1 y_1 \\ \\ \sum x_1^2 \sum \hat{z}_1 y_1 - \sum \hat{z}_1 x_1 \sum x_1 y_1 \end{bmatrix}_{2\times1} \qquad (٤/٣)$$

وهذا التقدير يتمتع بخصائص مقدر OLS المعروفة أي BLUE وهو لا يشمل تحيز تقدير لأن كل من x_1 و $\hat{z}_1$ متغيرات غير عشوائية كما أن كل منهما مستقل عن عنصر الخطأ u_1 في المعادلة (١/٣) ويكون مقدر $\hat{\beta}_1$ هو

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum \hat{z}_1^2 \sum x_1 y_1 - \sum \hat{z}_1 x_1 \sum \hat{z}_1 y_1}{\sum \hat{z}_1^2 \sum x_1^2 - \left(\sum \hat{z}_1 x_1\right)^2} = \frac{\sum \hat{z}_1^2 \sum x_1 y_1}{\sum \hat{z}_1^2 \sum x_1^2} = \frac{\sum x_1 y_1}{\sum x_1^2} \qquad (٥/٣)$$

وذلك بفرض استقلال x_1 و $\hat{z}_1$ يكون مقدر $\hat{\delta}_1$ هو

$$\hat{\delta}_1 = \frac{\sum x_1^2 \sum \hat{z}_1 y_1 - \sum \hat{z}_1 x_1 \sum x_1 y_1}{\sum \hat{z}_1^2 \sum x_1^2 - \left(\sum \hat{z}_1 x_1\right)^2} = \frac{\sum x_1^2 \sum \hat{z}_1 y_1}{\sum \hat{z}_1^2 \sum x_1^2} = \frac{\sum \hat{z}_1 y_1}{\sum \hat{z}_1^2} \qquad (٦/٣)$$

وذلك بفرض استقلال x_2 و $\hat{z}_2$ أيضا

توضع المعادلة (١/٣) في الصورة العامة فتصبح

$$Y_{1i} = \alpha_1 + \beta_1 X_{1i} + \delta_1 \hat{Z}_{1i} + U_{1i} \quad i = 1, \ldots, n \qquad (٧/٣)$$

ومنها يكون تقدير الحد الثابت

$$\hat{\alpha}_1 = \overline{Y}_1 - \hat{\beta}_1 \overline{X}_1 - \hat{\delta}_1 \overline{\hat{Z}}_1 \qquad (٨/٣)$$

وتقدير معاملات انحدار المعادلة الفردية الثانية بنفس المعادلات (٥/٣) و (٦/٣) و (٨/٣) مع تغيير رقم المعادلة من ١ إلى ٢ كما يلي

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum x_2 y_2}{\sum x_2^2} \qquad (٩/٣)$$

وذلك بفرض استقلال x_2 و $\hat{z}_2$، ويكون مقدر $\hat{\delta}_2$ هو

$$\hat{\delta}_2 = \frac{\sum \hat{z}_2 y_2}{\sum \hat{z}_2^2} \qquad (١٠/٣)$$

وذلك بفرض استقلال x_2 و $\hat{z}_2$ أيضا

ويكون تقدير الحد الثابت

$$\hat{\alpha}_2 = \overline{Y}_2 - \hat{\beta}_2 \overline{X}_2 - \hat{\delta}_2 \overline{\hat{Z}}_2 \qquad (١١/٣)$$

ثانيا: تقدير معاملات الانحدار في المعادلة المجمعة:

نتبع نفس الخطوات السابقة لتقدير معاملات الانحدار المجمعة

ولتقدير معاملات الانحدار في المعادلة المجمعة يتم تجميع المعادلتين (١/٣) و (٢/٣) فيصبح النموذج المجمع

$$\sum_{l=1}^{2} y_{il} = \mathrm{B}\sum_{l=1}^{2} x_{il} + \Delta\sum_{l=1}^{2} z_{il} + \sum_{l=1}^{2} u_{il}\,, \quad i=1,\dots,n \qquad (١٢/٣)$$

$$\sum_{l=1}^{2} z_{il} = \Theta\sum_{l=1}^{2} w_{il} + \sum_{l=1}^{2} v_{il}\,, \qquad i=1,\dots,n \qquad (١٣/٣)$$

وتظل هاتين المعادلتين في شكل انحرافات عن الأوساط الحسابية المناظرة للمتغيرات المجمعة، ولتسهيل الاشتقاقات الرياضية نضع المعادلتين السابقتين في الشكل التالي بفرض أن

$$d_i = \sum_{l=1}^{2} y_{il}\ ,\ k_i = \sum_{l=1}^{2} w_{il}\,,\ g_i = \sum_{l=1}^{2} z_{il}\ \ and\ \ h_i = \sum_{l=1}^{2} x_{il}$$

إذن

$$d_i = \mathrm{B}\,h_i + \Delta\,g_i + u_i\,, \quad i=1,\dots,n \qquad (١٤/٣)$$

$$g_i = \Theta\,k_i + v_i\,, \quad i=1,\dots,n \qquad (١٥/٣)$$

والفروض الموضوعة على المعادلات الفردية تظل قائمة على المعادلة المجمعة كما سبق في حالة تحليل البواقي

في ظل هذه الفروض يمكن تقدير معاملات انحدار المعادلة المجمعة بنفس الخطوات التي اتبعت في تقدير معاملات المعادلات الفردية نبدأ بالمعادلة (١٥/٣) لتقدير g_i وكما هو معروف

يتم تقدير $\hat{\Theta} = \dfrac{\sum gk}{\sum k^2}$ ويكون تقدير g_i هو $\hat{g}_i = \hat{\Theta}\,k$ بالتعويض في المعادلة (١٤/٣)

$$d_i = \mathrm{B}\,h_i + \Delta\,\hat{g}_i + u_i\,, \quad i=1,\dots,n \qquad (١٦/٣)$$

ويكون تقدير معاملات الانحدار B، Δ كالآتي

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathrm{B}} \\ \\ \hat{\Delta} \end{bmatrix}_{2\times1} = \frac{1}{\sum \hat{g}^2 \sum h^2 - \left(\sum \hat{g}\ h\right)^2} \begin{bmatrix} \sum \hat{g}^2 \sum hd - \sum \hat{g}h \sum \hat{g}d \\ \\ \sum h^2 \sum \hat{g}d - \sum \hat{g}h \sum hd \end{bmatrix}_{2\times1} \qquad (١٧/٣)$$

وهذه التقديرات غير متحيزة ويكون تقدير معاملات الانحدار كما يلي:

$$\hat{\mathrm{B}} = \frac{\sum \hat{g}^2 \sum hd - \sum \hat{g}h \sum \hat{g}d}{\sum \hat{g}^2 \sum h^2 - \left(\sum \hat{g}\ h\right)^2} = \frac{\sum \hat{g}^2 \sum hd}{\sum \hat{g}^2 \sum h^2} = \frac{\sum hd}{\sum h^2} \qquad (١٨/٣)$$

لأن h و $\hat{g}$ مستقلتين حيث أنهما مجموع x و $\hat{z}$ على التوالي والمستقلتين فرضا، وكذلك

$$\hat{\Delta}=\frac{\sum h^2\sum \hat{g}d-\sum \hat{g}h\sum hd}{\sum \hat{g}^2\sum h^2-\left(\sum \hat{g}\ h\right)^2}=\frac{\sum h^2\sum \hat{g}d}{\sum \hat{g}^2\sum h^2}=\frac{\sum \hat{g}d}{\sum \hat{g}^2} \qquad (١٩/٣)$$

ولتقدير الحد الثابت توضع المعادلة (٧٢/٢) في الصورة العامة فتصبح:

$$D_i=\mathrm{A}+\mathrm{B}\ H_i+\Delta \hat{G}_i+U_i\,,\quad i=1,\ldots,n \qquad (٢٠/٣)$$

ومنها

$$\hat{A}=\overline{D}-\hat{\mathrm{B}}\,\overline{H}-\hat{\Delta}\,\overline{\hat{G}} \qquad (٢١/٣)$$

ثالثا: قياس تحيز التجميع في معامل انحدار المتغير المفسر غير العشوائي

لقياس تحيز التجميع في معامل انحدار المتغير غير العشوائي، يقارن التقدير في المعادلة (١٨/٣) بمتوسط التقدير في المعادلتين (٥/٣) و (٩/٣) أي

$$\text{تحيز التجميع}=\hat{\mathrm{B}}-\frac{1}{2}(\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2) \qquad (٢٢/٣)$$

بأخذ توقع تحيز التجميع

$$E\left(\hat{\mathrm{B}}-\frac{1}{2}(\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2)\right)=\mathrm{B}-\frac{1}{2}\left(\beta_1+\beta_2\right) \qquad (٢٣/٣)$$

إذن

وهذا التحيز مساوي للتحيز الذي تم حسابه في المعادلة (٢٩/٢) وهذا لعدم وجود تحيز في تقدير معاملات الانحدار لأن المتغيرات المفسرة x و $\hat{z}$ هي متغيرات غير عشوائية وتحيز التجميع في معامل المتغير غير العشوائي بالتقدير بالمتغير المساعد مطابق تماما لتحيز التجميع في حالة التقدير بتحليل البواقي وذلك لأن المتغير غير العشوائي مستقل تبادليا ومستقل عن عنصر الخطأ ولا يوجد تحيز تقدير في الحالتين.

رابعا: قياس تحيز التجميع في معامل انحدار المتغير العشوائي المفسر

لقياس تحيز التجميع في معامل انحدار المتغير العشوائي المفسر، يقارن التقدير في المعادلة (١٩/٣) بمتوسط التقدير في المعادلتين (٦/٣) و (١٠/٣) أي $\hat{\Delta}-\frac{1}{2}\left(\hat{\delta}_1+\hat{\delta}_2\right)$ وتوقعه

$$E\left(\hat{\Delta}-\frac{1}{2}\left(\hat{\delta}_1+\hat{\delta}_2\right)\right)=\Delta-\frac{1}{2}\left(\delta_1+\delta_2\right) \qquad (٢٤/٣)$$

حيث أن $\hat{\Delta}$ و $\hat{\delta}_1$ و $\hat{\delta}_2$ تقديرات غير متحيزة للمعلمات المناظرة، ولمقارنة تحيز التجميع هذا بتحيز التجميع الذي تم حسابه في المعادلة (٣٤/٢) التي نورد الطرف الأيسر منها وتصفيته لتسهيل المقارنة فيصبح

$$\Delta+\left(\frac{\sigma_{g,u}}{\sigma_g^2}\right)-\frac{1}{2}\left(\delta_1+\frac{\sigma_{z1,u1}}{\sigma_{z1}^2}+\delta_2+\frac{\sigma_{z2,u2}}{\sigma_{z2}^2}\right)=\left(\Delta-\frac{1}{2}\left(\delta_1+\delta_2\right)\right)+\left(\frac{\sigma_{g,u}}{\sigma_g^2}-\frac{1}{2}\left[\frac{\sigma_{z1,u1}}{\sigma_{z1}^2}+\frac{\sigma_{z2,u2}}{\sigma_{z2}^2}\right]\right)$$

بمقارنة هذا المقدار بالمقدار المحسوب في المعادلة (٢٤/٣) يلاحظ أن تحيز التجميع في تقدير معامل انحدار المتغير العشوائي المفسر المحسوب بتحليل البواقي يختلف عن ذلك المحسوب بالمتغيرات المساعدة بالمقدار $\frac{\sum z_1u_1+\sum z_2u_2}{\sum z_1^2+\sum z_2^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\sum z_1u_1}{\sum z_1^2}+\frac{\sum z_2u_2}{\sum z_2^2}\right)$ والذي سبق حسابه في المعادلة (٣٤/٢) وهذا الفرق يعود إلى التحيز في تقدير معامل انحدار المتغير العشوائي المفسر سواء في المعادلة المجمعة أو المعادلات الفردية عند التقدير بتحليل البواقي

خامسا: قياس تحيز التجميع في الحد الثابت

بالرجوع إلى المعادلتين (٨/٣) و(١١/٣) مقدر $\hat{\alpha}_1$ و $\hat{\alpha}_2$ الحد الثابت في المعادلتين الفرديتين الأولى والثانية على التوالي والمعادلة (٢١/٣) مقدر $\hat{A}_1$ الحد الثابت في المعادلة المجمعة، وحساب تحيز التجميع يكون بالفرق بين تقدير الحد الثابت في المعادلة المجمعة ومجموع الحدين الثابتين في المعادلتين الفرديتين أي أن تحيز التجميع = $\hat{A}-(\hat{\alpha}_1+\hat{\alpha}_2)$ والقيمة المتوقعة لهذا المقدار هي

$$E\left[\hat{A}-(\hat{\alpha}_1+\hat{\alpha}_2)\right]=A-(\alpha_1+\alpha_2) \qquad (٢٥/٣)$$

لأنه لا يوجد تحيز تقدير في هذه المقدرات بالمقارنة بتحيز التجميع بطريقة تحليل البواقي المحسوب في المعادلة (٤٤/٢) والتي نوردها هنا لتسهيل المقارنة

$$\hat{A}^*-(\hat{\alpha}_1^*+\hat{\alpha}_2^*)=\left[A-(\alpha_1+\alpha_2)\right]+\left(\bar{Z}_1\frac{\sigma_{z1,u1}}{\sigma_{z1}^2}+\bar{Z}_2\frac{\sigma_{z2,u2}}{\sigma_{z2}^2}-\frac{\sigma_{g,u}}{\sigma_g^2}(\bar{Z}_1+\bar{Z}_2)\right)$$

بمقارنة هذا المقدار بتحيز تجميع الحد الثابت المحسوب بطريقة المتغيرات المساعدة في المعادلة (٢٥/٣) يوجد فرق قدره $\left(\bar{Z}_1\frac{\sigma_{z1,u1}}{\sigma_{z1}^2}+\bar{Z}_2\frac{\sigma_{z2,u2}}{\sigma_{z2}^2}-\frac{\sigma_{g,u}}{\sigma_g^2}(\bar{Z}_1+\bar{Z}_2)\right)$ الذي يمكن تعميمه على النحو التالي:

$$\sum_{l=1}^{L}\frac{\overline{Z}_{il}\sum_{i=1}^{n}z_{il}u_{l;}}{\sum_{i=1}^{n}z_{il}^{2}}-\frac{\sum_{l=1}^{L}\sum_{i=1}^{n}z_{il}u_{il}}{\sum_{l=1}^{L}\sum_{i=1}^{n}z_{il}^{2}}\sum_{l=1}^{L}\overline{Z}_{l}$$

يلاحظ:

١ - وجود المتغير العشوائي المفسر مع التقدير بطريقة تحليل البواقي أدى إلى ظهور المقدار $(\overline{Z}_1+\overline{Z}_2)\frac{\sigma_{g,u}}{\sigma_g^2}-\overline{Z}_2\frac{\sigma_{z2,u2}}{\sigma_{z2}^2}+\overline{Z}_1\frac{\sigma_{z1,u1}}{\sigma_{z1}^2}$ في تحيز تجميع الحد الثابت ويمكن تعميمه كما يلي:

$$\sum_{l=1}^{L}\frac{\overline{Z}_{il}\sum_{i=1}^{n}z_{il}u_{l;}}{\sum_{i=1}^{n}z_{il}^{2}}-\frac{\sum_{l=1}^{L}\sum_{i=1}^{n}z_{il}u_{il}}{\sum_{l=1}^{L}\sum_{i=1}^{n}z_{il}^{2}}\sum_{l=1}^{L}\overline{Z}_{l} \qquad (٤٤/٢)$$

٢ - تحيز التجميع في المعادلة (٤٣/٢) يحتوي على تحيز تقدير بسبب التحيز في تقدير معامل الانحدار Δ و δ_1 و δ_2 في المرحلة الثانية

إذن وجود متغير عشوائي مفسر امتد تأثيره إلى تحيز التجميع في الحد الثابت

٣/٢ مقارنة نتائج الطريقتين:

يوضح الجدول التالي مقارنة بين نتائج الطريقتين

جدول (١) مقارنة التحيز في تقدير تحيز التجميع بالطريقتين

البيان	طريقة تحليل البواقي	متغير مساعد
التحيز في تقدير تحيز تجميع معامل المتغير غير العشوائي	لا يوجد	لا يوجد
التحيز في تقدير تحيز تجميع معامل المتغير العشوائي	$\frac{\sum_{l=1}^{L}\sum_{i=1}^{n}z_{il}u_{il}}{\sum_{l=1}^{L}\sum_{i=1}^{n}z_{il}^{2}}-\frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}z_{il}u_{il}}{\sum_{i=1}^{n}z_{il}^{2}}\right)_l$	لا يوجد
التحيز في تقدير تحيز تجميع الحد الثابت	$\sum_{l=1}^{L}\frac{\overline{Z}_{il}\sum_{i=1}^{n}z_{il}u_{l;}}{\sum_{i=1}^{n}z_{il}^{2}}-\frac{\sum_{l=1}^{L}\sum_{i=1}^{n}z_{il}u_{il}}{\sum_{l=1}^{L}\sum_{i=1}^{n}z_{il}^{2}}\sum_{l=1}^{L}\overline{Z}_{l}$	لا يوجد

من هذا الجدول يتضح أن التحيز في تقدير معامل انحدار المتغير العشوائي المفسر انعكس على تقدير تحيز التجميع في هذه المعلمة وامتد أثره على تقدير تحيز التجميع في الحد الثابت مما يعطي أفضلية لطريقة المتغيرات المساعدة فهي أكثر ثباتا.

٣ - دراسة حالة:

لتوضيح أثر طريقتي التقدير المعروضتين على التقديرات وحساب مقدار التحيز لكل منهما نعرض حالة استهلاك السكر أسبوعيا لسبعة عمال (جزء من بيانات أكثر جمعتها الباحثة من قبل لدراسات أخرى) يعملون في مزرعة أحد أقارب الباحثة بأحد المحافظات في السنة الزراعية ٢٠١٨/٢٠١٧ أي من أول أكتوبر ٢٠١٧ حتى نهاية سبتمبر ٢٠١٨ وهي ٥٢ أسبوع

١/٣ بناء النموذج:

يتكون النموذج من سبع معادلات فردية و٥٢ مشاهدة - يتم تجميعها لقياس تحيز التجميع بالطريقتين، تحليل البواقي، والمتغيرات المساعدة وإظهار الفرق في الحالتين

المعادلات الفردية:

$$Y_{ji} = \alpha_j + \beta_j X_{ji} + \delta_j Z_{ji} + U_{ji} \quad , j = 1,..,7, \; i = 1,\ldots,52 \quad (١/٣)$$

معادلة المتغير المساعد:

$$Z_{ji} = \gamma_j + \theta_j W_{ji} + V_{ji} \quad , j = 1,..,7, \; i = 1,\ldots,52 \quad (٢/٣)$$

حيث Y استهلاك السكر بالكيلوجرام

α و γ الحدود الثابتة

β و δ و θ معاملات الانحدار Slopes

X عدد الزوار متغير غير عشوائي

Z الدخل الأسبوعي متغير عشوائي

U و V عناصر الخطأ في المعادلات المناظرة

W عدد أيام العمل أسبوعيا متغير غير عشوائي يفسر الدخل

٢/٣ جمع البيانات وفحصها

العمال الذين تم جمع بياناتهم يعملون في مزرعة واحدة. يستطيعون القراءة والكتابة وبعضهم يحمل مؤهل متوسط. وقد تم توزيع نموذج لتسجيل البيانات التالية تحت إشراف رئيسهم الذي يحمل دبلوم تجارة ومتابعة أسبوعية من الباحثة:

١ - كمية السكر المستهلكة بمعيار كوب الماء العادي حوالي $\frac{1}{4}$ كيلو سكر

٢ - عدد الزوار الذين استقبلوهم

٣ - عدد أيام العمل باليومية

تم حساب دخل العمال في الدراسة، والعامل الأول على سبيل المثال:

توجد أساليب للمزارعة من بينها أن يحصل المزارع على $\frac{1}{4}$ المحصول مقابل عمله اليدوي في الحقل ولذلك يتحمل تكلفة إبادة الحشائش الضارة بمبيدات الحشائش الكيميائية

يزرع ٨ فدان له $\frac{1}{4}$ المحصول ويتحمل تكاليف إزالة الحشائش الضارة

الأرض تزرع مرتين محصول صيفي (أرز) ومحصول شتوي (قمح أو ينجر)

الأرز يتم حصاده في سبتمبر ٢٠١٧ مساحة ٨ فدان × ٢،٢٥ = ١٨ طن

حيث متوسط إنتاج الفدان ٢،٢٥ طن فيكون حق المزارع = ١٨ ÷ ٤ = ٤،٥ طن

يطرح مصاريف إزالة الحشائش مايوازي ثمن طن واحد

الصافي: ٣،٥ طن × ٣٠٠٠ جنيه = ١٠،٥٠٠ بمتوسط أسبوعي ٤٠٤ جنيه (نصف سنة) من أول أكتوبر ٢٠١٧ حتى حصاد القمح في أول ابريل ٢٠١٨ وهذا يمثل الجزء الثابت من دخل العامل في هذه الفترة

محصول القمح في ابريل ٢٠١٨ (المحصول الشتوي) ٨ × ١٢ = ٩٦ أردب [(١)]

---

(١) أردب القمح = ١٥٠ كيلو جرام

حيث متوسط إنتاج الفدان ١٢ أردب فيكون حق المزارع = ٩٦ ÷ ٤ = ٢٤ أردب

يطرح مصاريف إزالة الحشائش ما يوازي ثمن ٤ أردب

الصافي: ٢٠ أردب

ولأن القمح يجب تسليمه للحكومة وقد حددت ثمن تسليم الأردب بمبلغ ٧٠٠ جنيه أي أن حق الفلاح = (٢٠ × ٧٠٠ = ١٤،٠٠٠ جنيه) بمتوسط أسبوعي ٥٣٨ جنيه لمدة ٢٦ أسبوع (نصف سنة) من أول أبريل ٢٠١٨ حتى حصاد الأرز في نهاية سبتمبر ٢٠١٨ (نهاية السنة الزراعية)، وهذا يمثل الجزء الثابت من دخل العامل في هذه الفترة

بالإضافة إلى الدخل السابق يعمل الفلاح لدى الغير باليومية وقد تحددت اليومية في فترة البحث بمتوسط ٥٠ جنيه صافي (مصاريف النقل ووجبة إفطار يتحملهما صاحب العمل)

يلاحظ أن زوجة العامل وأبنائه يعملون أحيانا باليومية إلى جانب الوالد لذلك نجد أيام العمل لديه قد تزيد عن ٧ أيام في بعض الأسابيع

جميع العمال يعاملون نفس المعاملة مع الفارق في المساحة التي يزرعها كل منهم

العامل الثاني: يزرع ٦ فدان

العامل الثالث: يزرع ٨ فدان

العامل الرابع: يزرع ٧ فدان

العامل الخامس: يزرع ٩ فدان

العامل السادس: يزرع ٦ فدان

العامل السابع: يزرع ٦ فدان

باستخدام برنامج SPSS-20 تم فحص بيانات الاستهلاك الأسبوعي Y من السكر وهو المتغير التابع في النموذج فوجدت جميعها عشوائية، وفيما يلي اختبار العشوائية (فهي تتبع توزيع معتدل Normal بمتوسط وانحراف معياري مناسب لكل عامل كما هو موضح في الجدول التالي)

Hypothesis Test Summary

	Null Hypothesis	Test	Sig.	Decision
1	The distribution of 1) استهلاك العامل) is normal with mean 2.51 and standard deviation 1.03.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	.142	Retain the null hypothesis.
2	The distribution of 2) استهلاك العامل) is normal with mean 2.64 and standard deviation 1.13.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	.212	Retain the null hypothesis.
3	The distribution of 3) استهلاك العامل) is normal with mean 2.83 and standard deviation 1.42.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	.077	Retain the null hypothesis.
4	The distribution of 4) استهلاك العامل) is normal with mean 1.65 and standard deviation 0.74.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	.051	Retain the null hypothesis.
5	The distribution of 5) استهلاك العامل) is normal with mean 2.85 and standard deviation 1.74.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	.075	Retain the null hypothesis.
6	The distribution of 6) استهلاك العامل) is normal with mean 2.69 and standard deviation 0.64.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	.268	Retain the null hypothesis.
7	The distribution of 7) استهلاك العامل) is normal with mean 1.78 and standard deviation 0.65.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	.292	Retain the null hypothesis.

Asymptotic significances are displayed. The significance level is .05.

كما تم فحص بيانات عدد الزوار الأسبوعي X فوجدت جميعها غير عشوائية، وفيما يلي اختبار العشوائية

Hypothesis Test Summary

	Null Hypothesis	Test	Sig.	Decision
1	The distribution of 1) زوار العامل) is normal with mean 2.48 and standard deviation 1.50.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	.000	Reject the null hypothesis.
2	The distribution of 2) زوار العامل) is normal with mean 1.83 and standard deviation 1.02.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	.002	Reject the null hypothesis.
3	The distribution of 3) زوار العامل) is normal with mean 2.48 and standard deviation 1.50.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	.000	Reject the null hypothesis.
4	The distribution of 4) زوار العامل) is normal with mean 1.62 and standard deviation 0.72.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	.000	Reject the null hypothesis.
5	The distribution of 5) زوار العامل) is normal with mean 2.69 and standard deviation 2.15.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	.000	Reject the null hypothesis.
6	The distribution of 6) زوار العامل) is normal with mean 1.67 and standard deviation 1.42.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	.030	Reject the null hypothesis.
7	The distribution of 7) زوار العامل) is normal with mean 1.67 and standard deviation 1.28.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	.023	Reject the null hypothesis.

Asymptotic significances are displayed. The significance level is .05.

كما تم فحص بيانات الدخل الأسبوعي Z فوجدت جميعها عشوائية، وفيما يلي اختبار العشوائية (فهي تتبع توزيع معتدل Normal بمتوسط وانحراف معياري مناسب لكل عامل كما هو موضح في الجدول التالي:

Hypothesis Test Summary

	Null Hypothesis	Test	Sig.	Decision
1	The distribution of 1) دخل العامل) is normal with mean 628.85 and standard deviation 111.52.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	.067	Retain the null hypothesis.
2	The distribution of 2) دخل العامل) is normal with mean 621.35 and standard deviation 87.55.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	.359	Retain the null hypothesis.
3	The distribution of 3) دخل العامل) is normal with mean 668.65 and standard deviation 103.26.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	.073	Retain the null hypothesis.
4	The distribution of 4) دخل العامل) is normal with mean 630.67 and standard deviation 89.84.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	.223	Retain the null hypothesis.
5	The distribution of 5) دخل العامل) is normal with mean 687.06 and standard deviation 137.74.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	.142	Retain the null hypothesis.
6	The distribution of 6) دخل العامل) is normal with mean 608.17 and standard deviation 113.41.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	.678	Retain the null hypothesis.
7	The distribution of 7) دخل العامل) is normal with mean 542.79 and standard deviation 92.66.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	.664	Retain the null hypothesis.

Asymptotic significances are displayed. The significance level is .05.

كما تم فحص بيانات عدد أيام العمل الأسبوعي W فوجدت جميعها غير عشوائية، وفيما يلي اختبار العشوائية:

Hypothesis Test Summary

	Null Hypothesis	Test	Sig.	Decision
1	The distribution of 1) ايام العامل) is normal with mean 4.33 and standard deviation 1.12.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	.023	Reject the null hypothesis.
2	The distribution of 2) ايام العامل) is normal with mean 6.00 and standard deviation 1.22.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	.001	Reject the null hypothesis.
3	The distribution of 3) ايام العامل) is normal with mean 6.00 and standard deviation 1.22.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	.001	Reject the null hypothesis.
4	The distribution of 4) ايام العامل) is normal with mean 4.62 and standard deviation 0.80.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	.000	Reject the null hypothesis.
5	The distribution of 5) ايام العامل) is normal with mean 3.54 and standard deviation 1.46.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	.005	Reject the null hypothesis.
6	The distribution of 6) ايام العامل) is normal with mean 5.29 and standard deviation 1.86.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	.034	Reject the null hypothesis.
7	The distribution of 7) ايام العامل) is normal with mean 4.06 and standard deviation 1.21.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	.043	Reject the null hypothesis.

Asymptotic significances are displayed. The significance level is .05.

إذن فالبيانات التي تم جمعها تحقق الشروط المطلوبة لتطبيق أسلوبي التقدير السابق توضيحها في الفصول السابقة

٣/٣تحليل البيانات بأسلوب تحليل البواقي

نبدأ بتحليل المعادلات الفردية بانحدار المتغير التابع Y على المتغير المفسر غير العشوائي X ثم نحسب البواقي، فيما يلي مخرجات SPSS للمعادلة الأولى:

إذن المعادلة الأولى هي $Y_1 = 2,285 + 0,025\ X_1$

بالمثل المعادلة الثانية هي $Y_2 = 1,704 + 0,415\ X_2$

وهكذا المعادلة الثالثة هي $Y_3 = 1,375 + 0,456\ X_3$

والمعادلة الرابعة هي $Y_4 = 0,873 + 0,424\ X_4$

والمعادلة الخامسة هي $Y_5 = 1,063 + 0,538\ X_5$

والمعادلة السادسة هي $Y_6 = 2,008 + 0,352\ X_6$

والمعادلة السابعة هي $Y_7 = 1,295 + 0,255\ X_7$

مجموع معاملات الانحدار = ٢،٤٦٥

متوسط معاملات الانحدار = ٠،٣٥٢

مجموع الجزء المقطوع = ١٠،٦٠٣

يتم مقارنة متوسط معاملات الانحدار بمعامل الانحدار في المعادلة المجمعة وكذلك بالنسبة لمجموع الجزء المقطوع مع الجزء المقطوع في المعادلة المجمعة

(٣/٣) المعادلة المجمعة هي $Y = 9,764 + 0,411\ X$

(٤/٣) التحيز في معامل الانحدار = ٠،٣٥٢ - ٠،٤١١ = ٠،٠٥٩ بنسبة ١٤،٤%

(٥/٣) التحيز في الجزء المقطوع = ١٠،٦٠٣ - ٩،٧٦٤ = ٠،٨٣٩ " ٨،٦%

هذا التحيز راجع للتجميع لأن المتغير المفسر X (عدد الزوار) متغير غير عشوائي مستقل عن عنصر الخطأ U في المعادلات الفردية، كذلك في المعادلة المجمعة

والآن نحسب تقديرات المتغير التابع $\hat{Y}_i$ ومنها نحسب البواقي $(Y_i - \hat{Y}_i)$ ونرمز لها بالرمز R_1 لكي نحسب انحدارها على المتغير العشوائي، وقد تمت هذه الخطوة، وبدراسة البيانات وجد أن جميعها عشوائية ماعدا المعادلة السابعة فالبواقي غير عشوائية كما يظهر في اختبار العشوائية كما يلي:

Hypothesis Test Summary

	Null Hypothesis	Test	Sig.	Decision
1	The distribution of 1) (بواقي) is normal with mean 0.00- and standard deviation 0.66.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	.403	Retain the null hypothesis.
2	The distribution of 2) (بواقي) is normal with mean 0.00- and standard deviation 0.71.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	.468	Retain the null hypothesis.
3	The distribution of 3) (بواقي) is normal with mean 0.00- and standard deviation 0.60.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	.782	Retain the null hypothesis.
4	The distribution of 4) (بواقي) is normal with mean 0.00- and standard deviation 0.43.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	.221	Retain the null hypothesis.
5	The distribution of 5) (بواقي) is normal with mean 0.00- and standard deviation 0.91.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	.345	Retain the null hypothesis.
6	The distribution of 6) (بواقي) is normal with mean 0.00- and standard deviation 0.42.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	.211	Retain the null hypothesis.
7	The distribution of 7) (بواقي) is normal with mean 0.00- and standard deviation 0.42.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	.005	Reject the null hypothesis.

Asymptotic significances are displayed. The significance level is .05.

واضح أن البواقي في المعادلات السبعة متوسطها = صفر وهو مايتفق مع نظرية المربعات الصغرى مع اختلاف الانحراف المعياري في كل معادلة

وفي حالة المتغيرات المفسرة العشوائية سيوجد تحيز تقدير (Theil 1972) وقد تم حسابه في المعادلة (١٤/٢) هذا بالإضافة إلى تحيز التجميع، وفيما يلي انحدار بواقي المعادلة الأولى على الدخل Z_1 المتغير العشوائي

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	-1.201-	.275		-4.368-	.000
	دخل (1)	.318	.070	.541	4.548	.000

a. Dependent Variable: 1) (بواقي)

إذن المعادلة الأولى هي $R_1 = -1,201 + 0,318\, Z_1$

تحيز التقدير السابق حسابه في المعادلة (١٤/٢) هو $\frac{\sigma_{zil,uil}}{\sigma^2_{zil}}$ أي $\frac{\text{التغاير بين } u \text{ و } z}{\text{تباين } z}$

Correlations

		دخل (1)	بواقي (1)
دخل (1)	Pearson Correlation	1	.541**
	Sig. (2-tailed)		.000
	Sum of Squares and Cross-products	63.439	20.187
	Covariance	1.244	.396
	N	52	52
بواقي (1)	Pearson Correlation	.541**	1
	Sig. (2-tailed)	.000	
	Sum of Squares and Cross-products	20.187	21.949
	Covariance	.396	.430
	N	52	52

**. Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

من جدول اختبار عشوائية الدخل Z كان الانحراف المعياري للمعادلة الأولى ١١١،٥٢ وكانت البيانات بالجنيه، ولكن الدخل أدخل في النموذج بالمائة جنيه فيكون الانحراف المعياري ١،١١٥٢ ويكون التباين = ١،٢٤٤ والتغاير من الجدول أعلاه = ٠،٣٩٦ فيكون تحيز التقدير في معامل انحدار المعادلة الأولى.

(٦/٣) تحيز تقدير معامل الانحدار = ٠،٣٩٦ ÷ ١،٢٤٤ = ٠،٣١٨

ويستمر نفس التحليل لباقي المعادلات، ولكن يجب حساب معاملات الانحدار في باقي المعادلات حتى يمكن قياس تحيز التجميع

فالمعادلة الثانية هي $R_2 = - 1,294 + 0,485\ Z_2$

و هكذا المعادلة الثالثة هي $R_3 = - 0,334 + 0,456\ Z_3$

والمعادلة الرابعة هي $R_4 = - 0,484 + 0,210\ Z_4$

والمعادلة الخامسة هي $R_5 = - 1,496 + 0,089\ Z_5$

والمعادلة السادسة هي $R_6 = - 0,197 + 0,047\ Z_6$

والمعادلة السابعة هي $R_7 = - 0,549 + 0,156\ Z_7$

مجموع معاملات الانحدار = ١،٧٦١

متوسط معاملات الانحدار = ٠،٢٥٢

مجموع الجزء المقطوع = - ٥،٥٥٥

يتم مقارنة متوسط معاملات الانحدار بمعامل الانحدار في المعادلة المجمعة وكذلك بالنسبة لمجموع الجزء المقطوع مع الجزء المقطوع في المعادلة المجمعة

(٧/٣) المعادلة المجمعة هي $Y = - 8,183 + 0,323\ Z$

تحيز التجميع في معامل الانحدار = ٠،٣٢٣ - ٠،٢٥٢ = ٠،٠٧١ بنسبة ٢٨،٢%
تحيز التجميع في الحد الثابت = - ٨،١٨٣ - (- ٥،٥٥٥) = - ٢،٦٢٨ " ٤٧،٣%
تحيز التجميع السابق يشمل تحيز تقدير كما سبق وأوضحنا في المعادلة الأولى وهذا التحيز سبق حسابه في المعادل (٢٤/٢) ومقداره $\frac{\sigma_{g,u}}{\sigma_g^2}$ وهو نفس القانون في المعادلة الأولى، تباين الدخل المجمع = ٢٤،٤٦٤ كما في الجدول التالي

Descriptive Statistics

	N	Variance
دخل مجمع	52	24.464
Valid N (listwise)	52	

أما التغاير بين الدخل المجمع والبواقي = ٧،٩ كما في الجدول التالي

Correlations

		دخل مجمع	بواقي مجمع
دخل مجمع	Pearson Correlation	1	.615**
	Sig. (2-tailed)		.000
	Sum of Squares and Cross-products	1247.676	402.888
	Covariance	24.464	7.900
	N	52	52
بواقي مجمع	Pearson Correlation	.615**	1
	Sig. (2-tailed)	.000	
	Sum of Squares and Cross-products	402.888	344.498
	Covariance	7.900	6.755
	N	52	52

**. Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

(٨/٣) إذن تحيز التقدير في معامل الانحدار = ٧،٩ ÷ ٢٤،٤٦٤ = ٠،٣٢٣
ويكون تحيز التجميع = ٠،٠٧١ - ٠،٣٢٣ = - ٠,٢٥٢

٤/٣ تحليل البيانات باستخدام المتغيرات المساعدة

الطريقة الثانية التي سبق توضيحها في التحليل النظري هي طريقة المتغيرات المساعدة. وفي حالتنا فالمتغير العشوائي هو الدخل Z والمتغير المساعد الذي يفسره هو أيام العمل W الذي يفسر الدخل

الخطوة الأول هي انحدار الدخل على أيام العمل ثم حساب تقديرات الدخل واستخدامها في انحدار متعدد مباشرة.

بإجراء اختبار العشوائية على تقديرات الدخل المحسوبة من الانحدار الدخل/أيام العمل وجدت جميعها غير عشوائية كما في الجدول التالي:

Hypothesis Test Summary

	Null Hypothesis	Test	Sig.	Decision
1	The distribution of 1) تقدير دخل) is normal with mean 3.77 and standard deviation 0.99.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	.023	Reject the null hypothesis.
2	The distribution of 2) تقدير دخل) is normal with mean 2.66 and standard deviation 0.39.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	.001	Reject the null hypothesis.
3	The distribution of 3) تقدير دخل) is normal with mean 5.33 and standard deviation 1.06.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	.001	Reject the null hypothesis.
4	The distribution of 4) تقدير دخل) is normal with mean 2.30 and standard deviation 0.36.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	.000	Reject the null hypothesis.
5	The distribution of 5) تقدير دخل) is normal with mean 3.53 and standard deviation 1.04.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	.005	Reject the null hypothesis.
6	The distribution of 6) تقدير دخل) is normal with mean 4.22 and standard deviation 1.02.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	.034	Reject the null hypothesis.
7	The distribution of 7) تقدير دخل) is normal with mean 3.52 and standard deviation 1.15.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	.043	Reject the null hypothesis.

Asymptotic significances are displayed. The significance level is .05.

أصبح الموقف الآن أن المتغيرين المفسرين X عدد الزوار وتقدير الدخل $\hat{Z}$ غير عشوائيين بالتالي لن يكون هناك تحيز تقدير، والمعادلات الفردية أصبحت:

$$Y_{ij} = \alpha_j + \beta_j X_{ij} + \delta_j \hat{Z}_{ij} + U_{ij} \qquad i = 1,...,52 \,, j = 1,...,7 \qquad (٩/٣)$$

والآن نبدأ بتحليل المعادلات الفردية بانحدار المتغير التابع Y على المتغيرين المفسرين غير العشوائيين X و $\hat{Z}$.

Correlations

		بواقي متعدد (1)	تقدير دخل (1)
بواقي متعدد (1)	Pearson Correlation	1	.000
	Sig. (2-tailed)		.998
	Sum of Squares and Cross-products	16.958	.011
	Covariance	.333	.000
	N	52	52
تقدير دخل (1)	Pearson Correlation	.000	1
	Sig. (2-tailed)	.998	
	Sum of Squares and Cross-products	.011	50.027
	Covariance	.000	.981
	N	52	52

إذن المعادلة الأولى هي

$$Y_1 = 0{,}944 + 0{,}073\ X_1 + 0{,}324\ \hat{Z}_1$$

Correlations

		زوار (1)	بواقي متعدد (1)
زوار (1)	Pearson Correlation	1	-.001-
	Sig. (2-tailed)		.996
	Sum of Squares and Cross-products	114.981	-.031-
	Covariance	2.255	-.001-
	N	52	52
بواقي متعدد (1)	Pearson Correlation	-.001-	1
	Sig. (2-tailed)	.996	
	Sum of Squares and Cross-products	-.031-	16.958
	Covariance	-.001-	.333
	N	52	52

التغاير بين المتغير غير العشوائي X_1 عدد الزوار والخطأ = - ٠,٠٠١ أي أنه صفر وهذا يؤكد عدم وجود تحيز في تقدير معامله كما هو واضح من الجدول أعلاه.

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	.944	.387		2.439	.018
	زوار (1)	.073	.056	.166	1.292	.202
	تقدير دخل (1)	.324	.085	.489	3.798	.000

a. Dependent Variable: استهلاك (1)

وكذلك التغاير بين المتغير غير العشوائي تقدير الدخل $\hat{Z}_1$ والخطأ = ٠,٠٠٠ وهذا يؤكد عدم وجود تحيز في تقدير معامله كما هو واضح من الجدول أعلاه.

وهذا الأمر قائم في باقي المعادلات الفردية

بالمثل المعادلة الثانية هي $Y_2 = 0,789 + 0,451\ X_2 + 0,319\ \hat{Z}_2$

وهكذا المعادلة الثالثة هي $Y_3 = 1,010 + 0,468\ X_3 + 0,063\ \hat{Z}_3$

والمعادلة الرابعة هي $Y_4 = 0,205 + 0,417\ X_4 + 0,295\ \hat{Z}_4$

والمعادلة الخامسة هي $Y_5 = -\ 1,114 + 0,547\ X_5 + 0,610\ \hat{Z}_5$

والمعادلة السادسة هي $Y_6 = 1,974 + 0,352\ X_6 + 0,008\ \hat{Z}_6$

والمعادلة السابعة هي $Y_7 = 0,724 + 0,243\ X_7 + 0,167\ \hat{Z}_7$

مجموع معاملات انحدار X = ٢،٥٥١ مجموع معاملات انحدار $\hat{Z}$ = ١،٧٨٦

متوسط معاملات انحدار X = ٠،٣٦٤ متوسط معاملات انحدار $\hat{Z}$ = ٠،٢٥٥

مجموع الجزء المقطوع = ٤،٣٢٧.

(١٠/٣) المعادلة المجمعة هي $Y = 3,622 + 0,503\ X + 0.308\ \hat{Z}$

Correlations

		بواقي متعدد مجمع	زوار مجمع
بواقي متعدد مجمع	Pearson Correlation	1	.001
	Sig. (2-tailed)		.997
	Sum of Squares and Cross-products	251.234	.280
	Covariance	4.926	.005
	N	52	52
زوار مجمع	Pearson Correlation	.001	1
	Sig. (2-tailed)	.997	
	Sum of Squares and Cross-products	.280	920.827
	Covariance	.005	18.055
	N	52	52

التغاير بين المتغير غير العشوائي X عدد الزوار المجمع والخطأ = ٠,٠٠٥ أي أنه صفر وهذا يؤكد عدم وجود تحيز في تقدير معامل هذا المتغير كما هو واضح من الجدول أعلاه.

Correlations

		بواقي متعدد مجمع	تقدير دخل مجمع
بواقي متعدد مجمع	Pearson Correlation	1	.000
	Sig. (2-tailed)		.998
	Sum of Squares and Cross-products	251.234	-.138-
	Covariance	4.926	-.003-
	N	52	52
تقدير دخل مجمع	Pearson Correlation	.000	1
	Sig. (2-tailed)	.998	
	Sum of Squares and Cross-products	-.138-	1066.419
	Covariance	-.003-	20.910
	N	52	52

التغاير بين المتغير غير العشوائي $\hat{Z}$ تقدير الدخل المجمع والخطأ = - ٠,٠٠٣ أي أنه صفر وهذا يؤكد عدم وجود تحيز في تقدير معامل هذا المتغير كما هو واضح من الجدول أعلاه.

إذن المعادلة المجمعة أيضا لا تشتمل على تحيز تقدير، والآن تحيز التجميع في معامل انحدار X (عدد الزوار)

(١١/٣) = ٠,٣٦٤ - ٠,٥٠٣ = - ٠,١٣٩ بنسبة (-) ٢٧،٦%

تحيز التجميع في معامل انحدار $\hat{Z}$ (تقدير الدخل)

(١٢/٣) = ٠,٢٥٥ - ٠,٣٠٨ = - ٠,٠٥٣ بنسبة (-) ١٧،٢%

تحيز التجميع في الحد الثابت

(١٣/٣) = ٤,٣٢٧ - ٣,٦٢٢ = ٠,٧٠٥ بنسبة ١٩،٥%

الخلاصة أن دراسة هذه الحالة تؤكد النتائج النظرية السابق التوصل إليها في البند (٣/٢) من هذه الدراسة.

بيانات العمال السبعة اللذين شملتهم الدراسة منقولا من صفحة بيانات SPSS

Y1	X1	Z1	W1	Y2	X2	Z2	W2	Y3	X3	Z3	W3
١,٢٥	١,٠٠	٢,٤٠	٣,٠٠	١,٥٠	١,٠٠	٢,٤٠	٦,٠٠	٢,٧٥	١,٠٠	٥,٢٥	٦,٠٠
١,٥٠	٢,٠٠	٢,٧٠	٤,٠٠	٢,٠٠	٢,٠٠	١,٩٨	٥,٠٠	٢,٥٠	٢,٠٠	٤,٥٠	٥,٠٠
٢,٠٠	٢,٠٠	٣,٢٥	٥,٠٠	٢,٥٠	٢,٠٠	٢,٠١	٦,٠٠	٢,٧٥	٢,٠٠	٥,٠٠	٦,٠٠
٢,٥٠	٥,٠٠	٢,٧٠	٤,٠٠	٣,٠٠	٣,٠٠	٢,٠١	٦,٠٠	٣,٢٥	٥,٠٠	٥,٥٠	٦,٠٠
١,٥٠	٤,٠٠	٢,٤٠	٣,٠٠	٢,٢٥	٢,٠٠	١,٩٨	٥,٠٠	٣,٥٠	٤,٠٠	٤,٧٥	٥,٠٠
٣,٠٠	٣,٠٠	٣,٥٠	٥,٠٠	٤,٠٠	٢,٠٠	٢,٨٢	٧,٠٠	٢,٧٥	٣,٠٠	٦,٠٠	٧,٠٠
٣,٠٠	٣,٠٠	٣,٥٠	٥,٠٠	٥,٠٠	٢,٠٠	٢,٢٨	٦,٠٠	٢,٧٥	٣,٠٠	٥,٥٠	٦,٠٠
٢,٠٠	٢,٠٠	٢,٤٠	٣,٠٠	١,٧٥	١,٠٠	١,٩٦	٥,٠٠	١,٥٠	٢,٠٠	٤,٥٠	٥,٠٠
٢,٥٠	٢,٠٠	٢,٧٠	٤,٠٠	٢,٢٥	٢,٠٠	١,٩٨	٥,٠٠	١,٥٠	٢,٠٠	٤,٥٠	٥,٠٠
١,٢٥	١,٠٠	٢,٥٠	٣,٠٠	١,٥٠	١,٠٠	٢,٠١	٦,٠٠	١,٢٥	١,٠٠	٥,٢٥	٦,٠٠
٢,٠٠	٦,٠٠	٢,٤٠	٣,٠٠	١,٧٥	٢,٠٠	٢,٢٨	٦,٠٠	٤,٠٠	٦,٠٠	٥,٢٥	٦,٠٠
٢,٥٠	٨,٠٠	٤,٠٠	٦,٠٠	٣,٠٠	٤,٠٠	١,٩٨	٥,٠٠	٥,٠٠	٨,٠٠	٤,٥٠	٥,٠٠
٢,٠٠	٥,٠٠	٢,٤٠	٣,٠٠	٤,٠٠	٥,٠٠	١,٦٨	٤,٠٠	٤,٠٠	٥,٠٠	٣,٥٠	٤,٠٠
١,٧٥	٢,٠٠	١,٨٠	٢,٠٠	١,٥٠	٢,٠٠	١,٦٢	٣,٠٠	١,٥٠	٢,٠٠	٢,٧٥	٣,٠٠
٢,٠٠	٦,٠٠	٢,٧٠	٣,٠٠	٣,٠٠	٤,٠٠	٢,٢٨	٥,٠٠	٤,٢٥	٦,٠٠	٤,٢٥	٥,٠٠
٣,٠٠	٤,٠٠	٣,٠٠	٤,٠٠	٢,٧٥	٢,٠٠	٢,٢٨	٣,٠٠	٣,٢٥	٤,٠٠	٢,٧٥	٣,٠٠
٢,٠٠	٣,٠٠	٢,٠٠	٢,٠٠	١,٥٠	١,٠٠	١,٦٤	٣,٠٠	٣,٧٥	٣,٠٠	٢,٥٠	٣,٠٠
٢,٢٥	٤,٠٠	٢,٢٥	٢,٠٠	١,٥٠	١,٠٠	٢,٠٧	٥,٠٠	٢,٥٠	٤,٠٠	٤,٢٥	٥,٠٠
١,٥٠	٢,٠٠	٢,٢٥	٢,٠٠	٢,٥٠	٣,٠٠	١,٦٨	٣,٠٠	١,٥٠	٢,٠٠	٣,٠٠	٣,٠٠
٢,٠٠	٣,٠٠	٣,٠٠	٤,٠٠	١,٧٥	٢,٠٠	١,٩٨	٧,٠٠	٢,٧٥	٣,٠٠	٦,٢٥	٧,٠٠
١,٠٠	٢,٠٠	٣,٢٥	٤,٠٠	٢,٥٠	٣,٠٠	٢,٤٤	٧,٠٠	١,٢٥	٢,٠٠	٦,٥٠	٧,٠٠
٢,٢٥	٣,٠٠	٣,٠٠	٤,٠٠	١,٧٥	٢,٠٠	٢,٤٣	٧,٠٠	٢,٧٥	٣,٠٠	٦,٠٠	٧,٠٠
١,٧٥	٢,٠٠	٣,٠٠	٤,٠٠	١,٥٠	١,٠٠	٢,٤٥	٧,٠٠	١,٢٥	٢,٠٠	٦,٢٥	٧,٠٠
٣,٠٠	٥,٠٠	٣,٥٠	٤,٠٠	٤,٠٠	٥,٠٠	٢,٥٤	٧,٠٠	٤,٢٥	٥,٠٠	٦,٥٠	٧,٠٠
١,٥٠	٢,٠٠	٣,٢٥	٤,٠٠	١,٢٥	١,٠٠	٢,٤٣	٧,٠٠	١,٥٠	٢,٠٠	٦,٠٠	٧,٠٠
١,٥٠	٢,٠٠	٣,٠٠	٤,٠٠	١,٥٠	١,٠٠	٢,٤٣	٧,٠٠	١,٥٠	٢,٠٠	٦,٢٥	٧,٠٠
٢,٠٠	١,٠٠	٥,٠٠	٦,٠٠	٢,٠٠	١,٠٠	٢,٤٥	٧,٠٠	١,٥٠	١,٠٠	٦,٥٠	٧,٠٠
٢,٠٠	١,٠٠	٥,٠٠	٦,٠٠	١,٢٥	١,٠٠	٢,٦٥	٧,٠٠	٢,٠٠	١,٠٠	٦,٢٥	٧,٠٠
٣,٢٥	٢,٠٠	٤,٥٠	٥,٠٠	١,٧٥	١,٠٠	٣,٤٣	٦,٠٠	٢,٢٥	٢,٠٠	٥,٠٠	٦,٠٠
٣,٠٠	٣,٠٠	٤,٧٥	٥,٠٠	٣,٠٠	٢,٠٠	٣,٥٤	٦,٠٠	٢,٥٠	٣,٠٠	٥,٢٥	٦,٠٠
٢,٧٥	١,٠٠	٤,٠٠	٤,٠٠	٢,٧٥	١,٠٠	٢,٦٤	٥,٠٠	١,٧٥	١,٠٠	٤,٥٠	٥,٠٠
٢,٠٠	١,٠٠	٤,٢٥	٤,٠٠	٢,٠٠	١,٠٠	٢,٩٦	٦,٠٠	١,٧٥	١,٠٠	٥,٧٥	٦,٠٠
٣,٠٠	٢,٠٠	٤,٥٠	٥,٠٠	٣,٠٠	٣,٠٠	٢,٧٥	٥,٠٠	٢,٠٠	٢,٠٠	٤,٥٠	٥,٠٠
٣,٢٥	٢,٠٠	٤,٠٠	٤,٠٠	٣,٢٥	٢,٠٠	٣,٤٣	٦,٠٠	٢,٠٠	٢,٠٠	٥,٠٠	٦,٠٠

W3	Z3	X3	Y3	W2	Z2	X2	Y2	W1	Z1	X1	Y1
٥,٠٠	٤,٥٠	٢,٠٠	٢,٥٠	٥,٠٠	٢,٧٢	١,٠٠	٣,٠٠	٥,٠٠	٥,٢٠	٢,٠٠	٣,٠٠
٧,٠٠	٦,٥٠	٣,٠٠	٣,٧٥	٧,٠٠	٣,٧٩	١,٠٠	٣,٢٥	٥,٠٠	٥,٢٠	٣,٠٠	٣,٢٥
٥,٠٠	٤,٥٠	٢,٠٠	٢,٥٠	٥,٠٠	٢,٧٥	٣,٠٠	٣,٥٠	٤,٠٠	٣,٧٥	٢,٠٠	٣,٥٠
٦,٠٠	٥,٠٠	١,٠٠	٢,٥٠	٦,٠٠	٣,٥٤	٢,٠٠	٢,٥٠	٦,٠٠	٥,٧٦	١,٠٠	٢,٥٠
٧,٠٠	٦,٢٥	١,٠٠	٢,٥٠	٧,٠٠	٤,٠٣	٢,٠٠	٢,٥٠	٥,٠٠	٤,٥٠	١,٠٠	٢,٥٠
٧,٠٠	٦,٥٠	٢,٠٠	٣,٠٠	٧,٠٠	٣,٦٥	١,٠٠	٢,٥٠	٦,٠٠	٥,٧٦	٢,٠٠	٢,٥٠
٧,٠٠	٦,٠٠	٢,٠٠	٣,٠٠	٧,٠٠	٤,٠٣	١,٠٠	٢,٥٠	٥,٠٠	٤,٧٦	٢,٠٠	٢,٥٠
٧,٠٠	٦,٢٥	٣,٠٠	٣,٢٥	٧,٠٠	٣,٧٥	٢,٠٠	٢,٢٥	٥,٠٠	٤,٥٠	٣,٠٠	٢,٢٥
٧,٠٠	٦,٢٥	٢,٠٠	٢,٢٥	٧,٠٠	٣,٧٥	١,٠٠	٣,٠٠	٥,٠٠	٤,٥٠	٢,٠٠	٣,٠٠
٧,٠٠	٦,٠٠	٢,٠٠	٢,٠٠	٧,٠٠	٣,٨٦	١,٠٠	٣,٠٠	٦,٠٠	٥,٧٦	٢,٠٠	٣,٢٥
٧,٠٠	٦,٠٠	٢,٠٠	٢,٥٠	٧,٠٠	٤,٠٣	٢,٠٠	٣,٢٥	٥,٠٠	٤,٧٥	٢,٠٠	٣,٠٠
٧,٠٠	٦,٥٠	١,٠٠	٣,٧٥	٧,٠٠	٣,٧٦	١,٠٠	٣,٥٠	٥,٠٠	٤,٥٠	١,٠٠	٣,٢٥
٧,٠٠	٦,٢٥	٢,٠٠	٢,٥٠	٧,٠٠	٢,٧٥	٢,٠٠	٢,٥٠	٥,٠٠	٤,٧٥	٢,٠٠	٣,٥٠
٧,٠٠	٦,٢٥	١,٠٠	٢,٥٠	٧,٠٠	٢,٧٥	١,٠٠	٢,٥٠	٦,٠٠	٥,٧٦	١,٠٠	٢,٥٠
٧,٠٠	٦,٢٥	٢,٠٠	١,٧٥	٧,٠٠	٢,٥٢	١,٠٠	١,٢٥	٥,٠٠	٤,٥٠	٢,٠٠	١,٢٥
٧,٠٠	٦,٠٠	٢,٠٠	١,٧٥	٧,٠٠	٢,٤٤	٢,٠٠	٢,٢٥	٥,٠٠	٤,٥٠	٢,٠٠	٢,٢٥
٧,٠٠	٦,٠٠	١,٠٠	١,٥٠	٧,٠٠	٢,٤٨	١,٠٠	٢,٠٠	٤,٠٠	٤,٢٥	١,٠٠	٢,٠٠
٧,٠٠	٦,٠٠	١,٠٠	١,٥٠	٧,٠٠	٢,٤٨	١,٠٠	٢,٢٥	٥,٠٠	٤,٥٠	١,٠٠	٢,٢٥

W5	Z5	X5	Y5	W4	Z4	X4	Y4
٣,٠٠	٤,٠٠	٥,٠٠	٢,٥٠	٥,٠٠	٢,١٠	١,٠٠	١,٠٠
٢,٠٠	٢,١٦	٧,٠٠	٤,٠٠	٥,٠٠	١,٨٠	١,٠٠	١,٢٥
٢,٠٠	٢,١٦	٤,٠٠	٢,٠٠	٤,٠٠	١,٥٠	٢,٠٠	١,٠٠
٢,٠٠	٢,١٦	٣,٠٠	١,٥٠	٥,٠٠	١,٨٠	١,٠٠	١,٢٥
٢,٠٠	٢,١٦	٤,٠٠	٣,٠٠	٤,٠٠	١,٥٠	٢,٠٠	١,٠٠
٢,٠٠	٢,١٦	٦,٠٠	٣,٥٠	٥,٠٠	٢,١٠	٢,٠٠	١,٥٠
٢,٠٠	٢,١٦	٢,٠٠	١,٢٥	٣,٠٠	١,٢٠	١,٠٠	١,٠٠
٢,٠٠	٢,١٦	١,٠٠	١,٠٠	٣,٠٠	١,٢٠	١,٠٠	١,٥٠
٢,٠٠	٢,١٦	٢,٠٠	١,٥٠	٥,٠٠	١,٨٠	٢,٠٠	١,٧٥
٢,٠٠	٢,١٦	١,٠٠	١,٢٥	٦,٠٠	٢,١٠	١,٠٠	١,٥٠
٢,٠٠	٢,١٦	٢,٠٠	١,٥٠	٤,٠٠	١,٥٠	١,٠٠	١,٠٠
٢,٠٠	٢,١٦	٢,٠٠	١,٥٠	٣,٠٠	١,٢٠	١,٠٠	١,٠٠
٢,٠٠	٢,١٦	٢,٠٠	١,٥٠	٣,٠٠	١,٢٠	٢,٠٠	١,٢٥
٢,٠٠	٢,١٦	١,٠٠	١,٠٠	٤,٠٠	١,٨٠	٣,٠٠	٢,٠٠
٢,٠٠	٢,٧٦	٣,٠٠	١,٥٠	٤,٠٠	١,٨٠	١,٠٠	٢,٠٠
٤,٠٠	٣,٠٦	٢,٠٠	٣,٥٠	٥,٠٠	٢,١٠	١,٠٠	٢,٠٠
٤,٠٠	٣,٠٦	٢,٠٠	٢,٥٠	٣,٠٠	١,٥٠	٣,٠٠	٢,٥٠
٣,٠٠	٢,٧٦	١,٠٠	٢,٢٥	٤,٠٠	١,٨٠	٢,٠٠	١,٥٠
٤,٠٠	٣,٠٦	٢,٠٠	٢,٧٥	٥,٠٠	٢,١٠	١,٠٠	١,٥٠
٢,٠٠	٢,٧٦	٢,٠٠	٢,٥٠	٤,٠٠	١,٢٠	١,٠٠	١,٢٥
٢,٠٠	٢,٧٦	١,٠٠	١,٥٠	٥,٠٠	١,٥٠	٢,٠٠	١,٢٥
٢,٠٠	٢,٤٦	٢,٠٠	١,٠٥	٥,٠٠	١,٥٠	١,٠٠	١,٢٥
٢,٠٠	٢,١٦	٣,٠٠	١,٧٥	٤,٠٠	١,٢٠	١,٠٠	١,٠٠
٤,٠٠	٢,٧٦	٢,٠٠	٢,٧٥	٥,٠٠	١,٥٠	٣,٠٠	١,٧٥
٣,٠٠	٢,٤٦	٢,٠٠	١,٧٥	٥,٠٠	١,٥٠	١,٠٠	١,٢٥
٣,٠٠	٢,٤٦	٢,٠٠	١,٧٥	٥,٠٠	١,٥٠	١,٠٠	١,٠٠
٣,٠٠	٢,٤٦	١,٠٠	١,٧٥	٥,٠٠	١,٥٠	١,٠٠	١,٠٠
٥,٠٠	٥,٦٠	١,٠٠	٢,٠٠	٤,٠٠	٣,١٢	١,٠٠	١,٢٥
٦,٠٠	٥,٦٠	٢,٠٠	٢,٥٠	٤,٠٠	٣,٤٢	١,٠٠	١,٥٠
٦,٠٠	٥,٦٠	٣,٠٠	٣,٧٥	٥,٠٠	٣,٧٢	٢,٠٠	١,٧٥
٥,٠٠	٥,٣٠	١,٠٠	٣,٠٠	٤,٠٠	٣,٤٢	١,٠٠	١,٢٥
٥,٠٠	٥,٣٠	١,٠٠	٣,٠٠	٤,٠٠	٣,٤٢	١,٠٠	١,٢٥
٥,٠٠	٥,٣٠	٢,٠٠	٢,٢٥	٥,٠٠	٣,٧٢	٣,٠٠	٢,٠٠
٦,٠٠	٥,٦٠	٢,٠٠	٣,٢٥	٤,٠٠	٣,٤٢	٢,٠٠	١,٧٥
٥,٠٠	٥,٣٠	١٠,٠٠	٩,٠٠	٥,٠٠	٣,٧٢	١,٠٠	١,٢٥
٦,٠٠	٤,٣٥	٩,٠٠	٦,٧٥	٥,٠٠	٣,٤٨	١,٠٠	١,٧٥
٦,٠٠	٤,٣٥	٥,٠٠	٦,٠٠	٤,٠٠	٣,١٨	٢,٠٠	١,٧٥
٥,٠٠	٤,٠٥	١,٠٠	٢,٧٥	٦,٠٠	٣,٧٨	٢,٠٠	٢,٠٠

W5	Z5	X5	Y5	W4	Z4	X4	Y4
٤,٠٠	٤,٠٥	١,٠٠	٢,٧٥	٥,٠٠	٢,٨٨	٣,٠٠	٢,٢٥
٣,٠٠	٣,٧٥	٢,٠٠	١,٥٠	٦,٠٠	٣,١٨	٣,٠٠	٢,٢٥
٥,٠٠	٤,٣٥	٢,٠٠	١,٥٠	٥,٠٠	٢,٨٨	١,٠٠	١,٥٠
٥,٠٠	٤,٣٥	١,٠٠	١,٠٠	٥,٠٠	٢,٨٨	٢,٠٠	٢,٠٠
٥,٠٠	٤,٥٠	٣,٠٠	٣,٠٠	٥,٠٠	٢,٨٨	٢,٠٠	١,٧٥
٥,٠٠	٤,٥٠	٢,٠٠	١,٧٥	٦,٠٠	٣,١٨	١,٠٠	١,٥٠
٥,٠٠	٤,٣٥	٢,٠٠	١,٧٥	٥,٠٠	٢,٨٨	٣,٠٠	٣,٠٠
٥,٠٠	٤,٣٥	١,٠٠	١,٧٥	٥,٠٠	٢,٨٨	٢,٠٠	٣,٠٠
٥,٠٠	٤,٥٠	٢,٠٠	٢,٠٠	٥,٠٠	٢,٨٨	٢,٠٠	٣,٠٠
٤,٠٠	٤,٣٥	١,٠٠	٢,٥٠	٦,٠٠	٣,١٨	١,٠٠	١,٥٠
٣,٠٠	٤,٣٠	٢,٠٠	٢,٢٥	٥,٠٠	٢,١٠	١,٠٠	١,٢٥
٤,٠٠	٤,٦٠	٢,٠٠	٢,٢٥	٥,٠٠	٢,١٠	٢,٠٠	١,٢٥
٢,٠٠	٤,٠٠	٧,٠٠	٤,٠٠	٤,٠٠	١,٨٠	٢,٠٠	١,٠٠
٢,٠٠	٤,٠٠	٨,٠٠	٤,٠٠	٥,٠٠	٢,١٠	٢,٠٠	١,٠٠

W7	Z7	X7	Y7	W6	Z6	X6	Y6
٦,٠٠	٤,٩٠	٢,٠٠	٢,٠٠	٤,٠٠	٢,١٦	١,٠٠	١,٧٥
٥,٠٠	٤,٥٠	٢,٠٠	٢,٢٥	٨,٠٠	٥,٥٠	٣,٠٠	٢,٠٠
٤,٠٠	٣,٥٠	٦,٠٠	٢,٥٠	٥,٠٠	٤,٢٥	٠٠	٢,٢٥
٣,٠٠	٣,٠٠	٢,٠٠	١,٥٠	٥,٠٠	٤,٥٠	٢,٠٠	٣,٠٠
٤,٠٠	٤,٠٠	٠٠	١,٧٥	٥,٠٠	٤,٥٠	٠٠	٢,٠٠
٤,٠٠	٤,٠٠	١,٠٠	٢,٢٥	٣,٠٠	٢,١٦	٤,٠٠	٣,٥٠
٣,٠٠	٢,٧٥	١,٠٠	٢,٥٠	٨,٠٠	٥,٦٠	١,٠٠	٢,٧٥
٤,٠٠	٤,٢٥	٣,٠٠	٢,٠٠	٤,٠٠	٢,١٦	٣,٠٠	٣,٢٥
٥,٠٠	٤,٥٠	٢,٠٠	١,٧٥	٥,٠٠	٤,٥٠	٣,٠٠	٣,٥٠
٤,٠٠	٣,٩٥	٤,٠٠	٢,٢٥	٣,٠٠	٣,٧٥	٢,٠٠	٣,٢٥
٦,٠٠	٤,٩٥	١,٠٠	٢,٥٠	٦,٠٠	٥,٤٠	١,٠٠	٢,٥٠
٥,٠٠	٣,٨٥	١,٠٠	١,٠٠	٩,٠٠	٧,٥٠	٠٠	٢,٠٠
٢,٠٠	١,٠٠	٢,٠٠	١,٥٠	٥,٠٠	٤,٢٠	٢,٠٠	٢,٥٠
٣,٠٠	١,٦٠	٠٠	١,٠٠	٧,٠٠	٥,٢٠	١,٠٠	٢,٢٥
٢,٠٠	١,٠٠	١,٠٠	١,٢٥	٤,٠٠	٢,٧٦	١,٠٠	٢,٥٠
٥,٠٠	٢,٩٠	٤,٠٠	٢,٢٥	٨,٠٠	٥,٢٥	٠٠	٢,٠٠
٢,٠٠	١,٠٠	٣,٠٠	١,٧٥	٢,٠٠	٢,٥٠	١,٠٠	٢,٧٥
٣,٠٠	٢,٣٠	٢,٠٠	١,٧٥	٣,٠٠	٢,٧٦	٢,٠٠	٢,٥٠
٤,٠٠	٣,٤٥	١,٠٠	١,٧٥	٤,٠٠	٣,٠٦	٣,٠٠	٢,٧٥
٤,٠٠	٣,٥٠	٠٠	١,٥٠	٤,٠٠	٢,٧٦	٤,٠٠	٣,٠٠
٣,٠٠	٢,٧٥	٢,٠٠	١,٥٠	٥,٠٠	٣,٧٦	٠٠	٢,٢٥
٤,٠٠	٣,٧٥	١,٠٠	١,٢٥	٤,٠٠	٢,٤٦	٠٠	٢,٠٠
٤,٠٠	٤,٠٠	١,٠٠	١,٥٠	٤,٠٠	٢,١٦	١,٠٠	١,٧٥
٤,٠٠	٤,٢٥	٠٠	١,٥٠	٣,٠٠	٢,٧٦	٠٠	١,٧٥
٥,٠٠	٤,٨٠	٤,٠٠	٢,٧٥	٣,٠٠	٢,٤٦	١,٠٠	٢,٠٠
٤,٠٠	٣,٢٢	٢,٠٠	١,٧٥	٤,٠٠	٢,٤٦	٠٠	٢,٠٠
٣,٠٠	٢,٣٠	١,٠٠	١,٢٥	٨,٠٠	٤,٥٠	٣,٠٠	٢,٢٥
٦,٠٠	٥,٥٢	١,٠٠	٢,٠٠	٧,٠٠	٤,٣٠	٢,٠٠	٣,٠٠
٥,٠٠	٤,٥٦	٠٠	١,٠٠	٧,٠٠	٤,٢٠	٥,٠٠	٤,٠٠
٤,٠٠	٤,٢٢	٢,٠٠	٢,٥٠	٨,٠٠	٥,٥٠	٠٠	٢,٠٠
٥,٠٠	٤,٣٢	١,٠٠	١,٢٥	٧,٠٠	٥,٣٠	١,٠٠	٢,٥٠
٦,٠٠	٥,٢٤	١,٠٠	١,٢٥	٨,٠٠	٥,٥٠	٠٠	٢,٢٥
٧,٠٠	٦,٥٨	٢,٠٠	٢,٢٥	٨,٠٠	٥,٤٠	٠٠	٢,٠٠
٦,٠٠	٥,٤٠	٣,٠٠	٢,٥٠	٦,٠٠	٤,٧٦	٢,٠٠	٣,٢٥
٦,٠٠	٥,٠٠	٢,٠٠	٣,٠٠	٧,٠٠	٤,٨٠	٤,٠٠	٣,٧٥
٣,٠٠	٢,٦٠	١,٠٠	١,٢٥	٦,٠٠	٤,٣٥	٣,٠٠	٣,٢٥
٢,٠٠	١,٠٠	٢,٠٠	١,٥٠	٩,٠٠	٧,٥٠	١,٠٠	٢,٥٠
٤,٠٠	٣,٦٨	٣,٠٠	٢,٠٠	٤,٠٠	٤,٠٥	٢,٠٠	٣,٢٥
٥,٠٠	٤,٨٦	١,٠٠	١,٧٥	٤,٠٠	٤,٠٥	٣,٠٠	٣,٧٥
٣,٠٠	٢,٩٠	٠٠	١,٠٠	٤,٠٠	٣,٧٥	٠٠	٢,٢٥

W7	Z7	X7	Y7	W6	Z6	X6	Y6
٣,٠٠	٢,٩٠	٢,٠٠	١,٢٥	٣,٠٠	٤,٣٥	١,٠٠	٢,٧٥
٣,٠٠	٣,٢٥	٠٠	١,٠٠	٥,٠٠	٤,٣٥	٥,٠٠	٤,٢٥
٣,٠٠	٢,٦٨	٢,٠٠	١,٢٥	٨,٠٠	٦,٥٠	٢,٠٠	٣,٢٥
٤,٠٠	٢,٩٨	٤,٠٠	٢,٠٠	٣,٠٠	٤,٥٠	٣,٠٠	٢,٧٥
٤,٠٠	٢,٦٨	٢,٠٠	٢,٥٠	٦,٠٠	٤,٦٠	٢,٠٠	٢,٥٠
٤,٠٠	٢,٦٨	٣,٠٠	٢,٠٠	٥,٠٠	٤,٣٥	١,٠٠	١,٥٠
٣,٠٠	٣,٢٠	٢,٠٠	١,٧٥	٤,٠٠	٤,٥٠	١,٠٠	١,٥٠
٢,٠٠	١,٥٠	١,٠٠	١,٢٥	٦,٠٠	٤,٦٠	٤,٠٠	٣,٠٠
٤,٠٠	٣,٧٥	٠٠	١,٠٠	٤,٠٠	٤,٣٠	٣,٠٠	٢,٢٥
٤,٠٠	٣,٠٠	٠٠	١,٠٠	٤,٠٠	٤,٦٠	٠٠	٢,٠٠
٥,٠٠	٤,٢٥	١,٠٠	١,٢٥	٥,٠٠	٤,٥٠	١,٠٠	٢,٢٥
٥,٠٠	٤,٥٠	٢,٠٠	١,٥٠	٤,٠٠	٤,٠٠	٢,٠٠	٣,٢٥

المراجع

A. Helmy, "**Residual Analysis of the Instrumental Variables Method of Estimation**", M.Sc thesis, Institute of Statistics, Cairo University 1974, pp 18

Albuquerque, Pedro H, 2003. "**A practical log-linear aggregation method with examples: heterogeneous income growth in the USA**,"Journal of Applied Econometrics, John Wiley & Sons, Ltd., vol. 18(6), pages 665-678.

Blundell, R. and Stoker, T. 2005. **Aggregation and heterogeneity**. Journal of Economic Literature 43, 347–91.

Blundell, R.W., H. Reed and T. Stoker (2003) **Interpreting Aggregate Wage Growth**, American Economic Review, Vol.93, No.4, 1114-1131, September. 66

Byrne, Joseph P. & Fiess, Norbert, (2011). "**International capital flows to emerging and developing countries: national and global determinants**," Working Papers 2011_01, Business School - Economics, University of Glasgow.

Carlo Fezzi and Ian Bateman **"The Impact of Climate Change on Agriculture: Nonlinear Effects and Aggregation Bias in Ricardian Models of Farmland Values**", The University of Chicago press, Journal of the Association of Environmental and Resource Economists, Volume 2, Number 1, 2015

Eric Jondeaua, **Contemporaneous Aggregation of GARCH Models and Evaluation of the Aggregation Bias**, First draft: February 2008

George C. Davis, Product Aggregation Bias as a **Specification Error in Demand Systems**, *American Journal of Agricultural Economics*, Vol. 79, No. 1. (Feb., 1997), pp. 100-109.

Glenn L. Thompson, Tutorials in Quantitative Methods for Psychology 2008**, Eliminating Aggregation Bias in Experimental Research: Random Coefficient Analysis as an Alternative to Performing a ‘by subjects’ and/or ‘by items’ ANOVA**, vol. 4(1), p. 21-34.

Hafner, Christian (2004), **Estimation of temporally aggregated multivariate GARCH Models**, Universite catholique de Louvain, Monterial.

Heckelman, **JC** Sullivan **TS (2002), Testing for aggregation bias in a non-linear framework: Some Monte Carlo results**

Jondeau, Eric (2008) **Contemporaneous Aggregation of GARCH Models and Evaluation of the Aggregation Bias,** University of Lausanne; Swiss Finance Institute

Krusell, P. and Smith, A. 2006. **Quantitative macroeconomic models with heterogeneous agents. In Advances in Economics and Econometrics,** Proceedings of the Ninth World Congress of the Econometric Society, ed. R. Blundell, W. Newey and T. Persson. Cambridge: Cambridge University Press.

Sbrana, Giacomo, **Structural Time Series Models and Aggregation: Some Analytical Results.** Neoma Business School May 2011

Theil, H. **Linear Aggregation of Economic Relations**, North Holland Publishing Co., Amsterdam, 1954, p 2

16 - ———— (1971)**, Principles *of Econometrics, John*** Wiley & Sons ,Inc,New York.

Zellner, Arnold (1969), On **the Aggregation Problem, a New Approach to a Troublesome Problem, in Estimation and Risk Programming**, Essays in Honor of Gerhard Tintner, Berlin, Sp.

Analysis of the Effect of Estimation Method on Aggregation bias for Aggregated Data Containing a Stochastic Explanatory Variable

By

Samar Ahmed Helmy, Ph. D

Department of Statistics, Mathematics and Insurace

Faculty of Commerce - Port Said University

blue_arkedia@hotmail.com

Abstract

Aggregating data involves bias in estimating the parameters of the aggregated model. This paper aims at Analyzing the effect of estimation method on aggregation bias for aggregated data containing a stochastic regressor. Two estimation methods are considered: Residual Analysis and auxiliary variables. A model of one regress and two regressors, is investigated where one of the regressors is stochastic. Mathematical derivations showed that residual analysis involved bias in estimating the parameter of the stochastic regressor. This bias led to a bias in estimating the intercept. Auxiliary variables method proved unbiased estimation of the concerned parameters.

The two methods are applied in an empirical case study of seven equations and 52 observations. Results of the application confirmed the theoretical derivations.